1989年1月18日
数学Ⅱ

数 学 Ⅱ (問題)

1．　n組の測定値 $(x_1, y_1, z_1), \cdots\cdots, (x_n, y_n, z_n)$ の間に近似的に一次関係

$$z_i = \alpha + \beta x_i + \gamma y_i \quad (i = 1, 2, \cdots\cdots, n : \alpha, \beta, \gamma \text{は定数})$$

があるとみなされるとき，最小２乗法による α，β，γ の推定値を標本平均 $\overline{x}$，$\overline{y}$，$\overline{z}$，標本分散 S_x^2，S_y^2，S_z^2 および 標本共分散 C_{xy}，C_{xz}，C_{yz} を用いて表わせ。　(20点)

2．　正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ からの大きさ２mの任意標本の中央値 (median) は μ の不偏推定量であることを証明せよ。　(20点)

3．　２つの確率変数 X，Yの相関係数を ρ とするとき，

$$-1 \leqq \rho \leqq 1$$

であることを証明せよ。　(20点)

4．　ある野球場では，入場券に１番からN番までの通し番号を付して発売しているという。ある日に，第三者がランダムに入場者から30枚の入場券を抽出して，その番号の和を計算すると 132×10^3 であった。この日の入場者数N（＝入場券発行枚数）を95％の信頼区間で推定せよ。
ただし，Xが正規分布 $N(0, 1)$ に従うとき $P(X > 1.645) = 0.050$，$P(X > 1.960) = 0.025$ である。　(20点)

5．　整数を値にとる時間的斉次Markov chain $X_0, X_1, \cdots\cdots$ を考える。
$X_0 = i$ のときに $X_n = j$ となる最初のn $(n \geqq 1)$ をとり，$T_{ij} = n$ によって確率変数 T_{ij} を定義する。ここで，i，j $(i \neq j)$ を固定し，

$$p \equiv P(T_{jj} < \infty) < 1, \quad q \equiv P(T_{ij} < \infty) < 1 \quad \text{とするとき，}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n = j \mid X_0 = i) \quad \text{を求めよ。}$$

〔ただし，$a_n \geqq 0$ で $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ が $|t| < 1$ で絶対収束するなら、$\lim_{t \to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が成立することを証明なしに用いてよい。〕　(20点)

数　学　Ⅱ　（解答例）

1．
$\triangle=\sum_{i=1}^{n}(z_i-\alpha-\beta x_i-\gamma y_i)^2=0$　を最少にするα，β，γを求める。

$$\frac{\partial\triangle}{\partial\alpha}=-2\sum_{i=1}^{n}(z_i-\alpha-\beta x_i-\gamma y_i)=0$$

$$\frac{\partial\triangle}{\partial\beta}=-2\sum_{i=1}^{n}(z_i-\alpha-\beta x_i-\gamma y_i)x_i=0$$

$$\frac{\partial\triangle}{\partial\gamma}=-2\sum_{i=1}^{n}(z_i-\alpha-\beta x_i-\gamma y_i)y_i=0$$

すなわち

$$n\alpha+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\beta+\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)\gamma=\sum_{i=1}^{n}z_i \qquad ①$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\alpha+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\beta+\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)\gamma=\sum_{i=1}^{n}x_iz_i \qquad ②$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)\alpha+\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)\beta+\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)\gamma=\sum_{i=1}^{n}y_iz_i \qquad ③$$

①を$\bar{x}$，$\bar{y}$，$\bar{z}$を用いて書き直すと

$$\alpha=\bar{z}-\beta\bar{x}-\gamma\bar{y} \qquad ①$$

これを②，③に代入すると

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2\right)\beta+\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}\right)\gamma=\sum_{i=1}^{n}x_iz_i-n\bar{x}\bar{z}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}\right)\beta+\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2-n\bar{y}^2\right)\gamma=\sum_{i=1}^{n}y_iz_i-n\bar{y}\bar{z}$$

$S_x^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\bar{x}^2$，$C_{xy}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\bar{x}\bar{y}$などを用いて書き直すと

$$S_x^2\beta+C_{xy}\gamma=C_{xz}$$

$$C_{xy}\beta+S_y^2\gamma=C_{yz}$$

これを解いて

$$\beta=\frac{S_y^2 C_{xz}-C_{xy}C_{yz}}{S_x^2 S_y^2-C_{xy}^2}\ ,\ \gamma=\frac{S_x^2 C_{yz}-C_{xy}C_{xz}}{S_x^2 S_y^2-C_{xy}^2}$$

$$\alpha=\bar{z}-\frac{S_y^2 C_{xz}-C_{xy}C_{yz}}{S_x^2 S_y^2-C_{xy}^2}\bar{x}-\frac{S_x^2 C_{yz}-C_{xy}C_{xz}}{S_x^2 S_y^2-C_{xy}^2}\bar{y}$$

２．medianは標本を大きさの順に並べた中央の２つの平均であるから

$X_{(1)} \leqq X_{(2)} \leqq \cdots\cdots \leqq X_{(m)} \leqq X_{(m+1)} \leqq \cdots\cdots \leqq X_{(2m)}$とすれば

$$X=\frac{1}{2}\left(X_{(m)}+X_{(m+1)}\right)$$

$X_{(m)}-\mu=X_{(m)}$ の確率密度関数を $f_{(m)}(x)$,

$X_{(m+1)}-\mu=X_{(m+1)}$ の確率密度関数を $f_{(m+1)}(x)$ とすると，

$$f_{(m)}(x)=\frac{(2m)!}{(m-1)!\,m!}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}du\right)^{m-1}$$

$$\times\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{x}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}du\right)^{m}\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

$$f_{(m+1)}(x)=\frac{(2m)!}{m!\,(m-1)!}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}du\right)^{m}$$

$$\times\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{x}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}du\right)^{m-1}\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

よって，$E(X)-\mu=\frac{1}{2}\left(E\left(X_{(m)}+X_{(m+1)}\right)\right)$

$$=\frac{1}{2}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x\,f_{(m)}(x)dx+\int_{-\infty}^{\infty} x\,f_{(m+1)}(x)dx\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x\left(f_{(m)}(x)+f_{(m+1)}(x)\right)dx\right\}$$

$$
= \frac{1}{2} \left\{ \int_{-\infty}^{0} x \left(f_{(m)}(x) + f_{(m+1)}(x) \right) dx \right.
$$

$$
\left. + \int_{0}^{\infty} x \left(f_{(m)}(x) + f_{(m+1)}(x) \right) dx \right\}
$$

$$
= \frac{1}{2} \left\{ - \int_{0}^{\infty} x \left(f_{(m)}(x) + f_{(m+1)}(x) \right) dx \right.
$$

$$
\left. + \int_{0}^{\infty} x \left(f_{(m)}(x) + f_{(m+1)}(x) \right) dx \right\}
$$

$$
= 0
$$

$\therefore E(X) = \mu$　即ちXはμの不偏推定量である。

3．任意の実数tに対して，常に次の関係式が成立する。

$$
0 \leqq E\left[\{ t(X - \mu_x) + (Y - \mu_y) \}^2 \right]
$$

$$
= \sigma_x^2 t^2 + 2\sigma_{xy} t + \sigma_y^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①
$$

ここに，μ_x，μ_y はX，Yの平均値

σ_x^2，σ_y^2 はX，Yの分散

σ_{xy}はX，Yの共分散

①より　$\sigma_{xy}^2 - \sigma_x^2 \sigma_y^2 \leqq 0$

$$
\frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2 \sigma_y^2} - 1 \leqq 0
$$

$$
\therefore \quad \rho^2 = \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2 \sigma_y^2} \leqq -1 \qquad \therefore \quad -1 \leqq \rho \leqq 1
$$

4．この野球場のN枚の入場券の番号の平均値は$\frac{N+1}{2}$である。

従って　$\bar{x}=\frac{132\times10^3}{30}=4400$　より　N＝8799と推定される。

抽出数30はNに比べて充分小さいので，

有限修正係数を無視して平均値を区間推定すれば

母集団の分散$\sigma^2=\frac{N^2-1}{12}$だから

$$\bar{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\frac{N+1}{2}<\bar{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

すなわち

$$4400-1.96\frac{1}{\sqrt{30}}\sqrt{\frac{8799^2-1}{12}}=3491<\frac{N+1}{2}<4400+1.96\frac{1}{\sqrt{30}}\sqrt{\frac{8799^2-1}{12}}=5309$$

よってNの95% 信頼区間は（6981, 10617）である。

5．$p_n\equiv P\ (X_n=j, X_{n-1}\neq j, \cdots\cdots, X_1\neq j\mid X_0=j)$　　$(n\geqq1)$

$q_n\equiv P\ (X_n=j, X_{n-1}\neq j, \cdots\cdots, X_1\neq j\mid X_0=i)$　　$(n\geqq1)$

$\phi_n\equiv P\ (X_n=j\mid X_0=j)$　　$(n\geqq0)$

$\psi_n\equiv P\ (X_n=j\mid X_0=i)$　　$(n\geqq0)$　とおけば

$0\leqq p_n,\ q_n,\ \phi_n,\ \psi_n\leqq1$であるから

$p(t)\equiv\sum_{n=1}^{\infty}p_n t^n$，$q(t)\equiv\sum_{n=1}^{\infty}q_n t^n$，$\phi(t)\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\phi_n t^n$，

$\psi(t)\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\psi_n t^n$は，$|t|<1$で絶対収束する。

よって　$t\to1-0$ とすれば

$p(t)\to\sum_{n=1}^{\infty}p_n=p$，$q(t)\to\sum_{n=1}^{\infty}q_n=q$，

$$\psi(t)\to\sum_{n=0}^{\infty}\psi_n=\sum_{n=0}^{\infty}P\ (X_n=j\mid X_0=i)=\sum_{n=1}^{\infty}P\ (X_n=j\mid X_0=i)$$

$(\because P\ (X_0=j\mid X_0=i)=0)$

一方，

$$\phi_n = \sum_{k=1}^{n} P(X_n = j \mid X_k = j)\, P(X_k = j, X_{k-1} \neq j, \cdots\cdots, X_1 \neq j \mid X_0 = j)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \phi_{n-k}\, p_k \quad (\because 時間的斉次\ \text{Markov chain}\ なので)$$

$$\phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n\, t^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \phi_{n-k}\, p_k \right) t^n \qquad (\because \phi_0 = 1)$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=k}^{n} \phi_{n-k}\, t^{n-k} \right) p_k\, t^k = 1 + \phi(t)\, p(t)$$

$$\psi_n = \sum_{k=1}^{n} P(X_n = j \mid X_k = j)\, P(X_k = j, X_{k-1} \neq j, \cdots\cdots, X_1 \neq j \mid X_0 = i)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \phi_{n-k}\, q_k$$ だから，同様にして

$$\psi(t) = \phi(t)\, q(t) = \frac{q(t)}{1 - p(t)}$$

$t \to 1-0$ とすれば，

$$\psi(t) \to \sum_{n=1}^{\infty} P(X_n = j \mid X_0 = i), \quad p(t) \to p, \quad q(t) \to q$$

$$\therefore \quad \sum_{n=1}^{\infty} P(X_n = j \mid X_0 = i) = \frac{q}{1-p}$$