1989年1月18日
数学Ⅰ

数　学　Ⅰ（問題）

1．　次の各問の$\boxed{}$に入る答のみを，所定の解答用紙に記入せよ。　　　　（各問４点，計20点）

(1)　２次元確率変数（Ｘ，Ｙ）が（０，０）を中心とする半径aの円内で一様に分布しているとき，確率変数$R=\sqrt{X^2+Y^2}$の確率密度関数は　$f(r)=\begin{cases}\boxed{} & (0\leqq r\leqq a)\\ 0 & (\text{それ以外})\end{cases}$　である。

(2)　$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ x^2\exp\left(-\frac{(2x-1)^2}{2}\right)dx=\boxed{}$

(3)　確率変数Ｘ，Ｙは互いに独立で，各々平均値 $\frac{1}{\lambda}$，$\frac{1}{\mu}$ の指数分布に従うとき，
$P(X+Y<a)=\boxed{}$である。ただし，$a>0$とする。

(4)　確率密度関数が次の式で与えられる分布の平均値のまわりの２ｒ次のモーメントは$\boxed{}$である。ただし，ｒは正の整数とする。

$$f(x)=\begin{cases}1-|x| & (|x|\leqq 1)\\ 0 & (|x|>1)\end{cases}$$

(5)　ある地方の１月中の天候は，前日の天候のみに関係して定まることが統計的に知られており，その確率は下表の通りである。１月１日が晴であった場合，２日，３日，４日の３日間が同じ天候である確率は$\boxed{}$である。

今日＼明日	晴	曇	雨	雪
晴	0.6	0.3	0	0.1
曇	0.3	0.2	0.4	0.1
雨	0.5	0.2	0.3	0
雪	0.4	0	0.2	0.4

2．　Ｕ，Ｖ　２つの箱にそれぞれＮ個（Ｎ≧２）の玉が入っており，Ｕは黒玉１個，残りは白玉，Ｖは全部白玉である。Ｕ，Ｖからそれぞれ１個ずつ取り出して互いに他の箱に移す。この手続きをｎ回繰り返したとき、黒玉がＵに入っている確率P_nを求めよ。　　　　（20点）

3．　Ｘ，Ｙが独立で，パラメータｐの同じ幾何分布$P(X=i)=pq^i$　（$i=0,1,2,\cdots\cdots$）に従うとき，

(1)　$U=\min(X,Y)$の確率分布を求めよ。

(2)　$V=X-Y$　の確率分布を求めよ。

(3)　ＵとＶが独立であることを証明せよ。　　　　（20点）

4．　離散的確率変数Ｘのとりうる値が，$r=0,1,2,\cdots\cdots,\min(K,n)$で，その確率分布が，

$$P(X=r)=\frac{\binom{K}{r}\binom{M-K}{n-r}}{\binom{M}{n}}\qquad (M,K,n\text{は正の整数で，}M\geqq K+n)$$

であるとき，

(1)　$\displaystyle\sum_{r=0}^{\min(K,n)}P(X=r)=1$　を確かめよ。

(2)　Ｘの平均を求めよ。

(3)　Ｘの分散を求めよ。　　　　（20点）

5．　確率変数Ｘの分布が$P(X=0)=p>0$，$P(X=1)=q>0$，$p+q=1$であるとき，Ｘの分布関数$F(x)$に対して，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\{F(x)-F(x-a)\}dx$　を求めよ。ただし，$a>0$とする。　　　　（20点）

数学Ｉ（解答例）

１・（１）Ｒの分布関数をＦ（ｒ）とすれば

$$F(r)=P(R\leqq r)=\begin{cases}0 & (r<0)\\ \pi r^2/\pi a^2 & (0\leqq r<a)\\ 1 & (a\leqq r)\end{cases}$$ だから

$$f(r)=\begin{cases}2r/a^2 & (0\leqq r\leqq a)\\ \\ 0 & (\text{それ以外})\end{cases}$$

（２）問題の式は、平均½、分散¼の正規分布の原点のまわりの２次のモーメント

$E(X^2)$ である。

ここで $E(X^2)=\mathrm{Var}(X)+\{E(X)\}^2$ であるから、

$(1/4)+(1/2)^2=1/2$

（３）

$$P(X+Y<a)=\int_{x+y<a,\ x,y\geqq 0}\lambda\exp(-\lambda x)\,\mu\exp(-\mu y)\,dx\,dy$$

$u=x+y$，$v=y$ とおけば、$x=u-v$、$y=v$

$$\begin{vmatrix}\partial x/\partial u & \partial x/\partial v\\ \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ \\ 0 & 1\end{vmatrix}=1$$ であるから

$$=\int_{0\leqq u<a、0\leqq v<u}\lambda\cdot\exp\{-\lambda(u-v)\}\cdot\mu\cdot\exp(-\mu v)\,du\,dv$$

$$=\lambda\mu\int_0^a\exp(-\lambda u)\left\{\int_0^u\exp(-(\mu-\lambda)v)\,dv\right\}du$$

(ア) ここで$\lambda \neq \mu$の場合、

$P(X+Y<a)$

$$=\frac{\lambda\mu}{\mu-\lambda}\cdot\int_0^a \exp(-\lambda u)-\exp(-\mu u)\,du$$

$$=1-\frac{\mu}{\mu-\lambda}\exp(-\lambda a)+\frac{\lambda}{\mu-\lambda}\exp(-\mu a)$$

(イ) $\lambda=\mu$の場合

$P(X+Y<a)$

$$=\lambda^2\int_0^a \exp(-\lambda u)\cdot u\,du \qquad \text{部分積分により}$$

$$=\lambda^2\cdot a\cdot\frac{\exp(-\lambda a)}{-\lambda}-\lambda^2\cdot\frac{\{\exp(-\lambda a)-1\}}{\lambda^2}$$

$$=1-(\lambda a+1)\cdot\exp(-\lambda a)$$

（注）ここでは、$\lambda \neq \mu$の場合が解けていれば正解とした。

(4)

$$E(X)=\int_{-1}^{1} x(1-|x|)\,dx$$

ここで、$x(1-|x|)$は奇関数であることより$E(X)=0$　よって

$\mu_{2r}=E[\{X-E(X)\}^{2r}]=E(X^{2r})$

$$=\int_{-1}^{1} x^{2r}(1-|x|)\,dx=2\int_0^1 x^{2r}(1-x)\,dx$$

$$=2/\{(2r+1)(2r+2)\}$$

(5)

1日		2日		3日		4日
晴れ	⇒　0．6　⇒	晴れ	⇒　0．6　⇒	晴れ	⇒　0．6　⇒	晴れ
	⇒　0．3　⇒	曇り	⇒　0．2　⇒	曇り	⇒　0．2　⇒	曇り
	⇒　0．0　⇒	雨	⇒　0．3　⇒	雨	⇒　0．3　⇒	雨
	⇒　0．1　⇒	雪	⇒　0．4　⇒	雪	⇒　0．4　⇒	雪

従って、$0.6^3+0.3\times0.2^2+0.1\times0.4^2=0.244$

2．

●$p_0=1$ は明らか。

●p_1 については、U，Vからともに白玉が取られて移されるから、Uから白玉が取られる確率（N－1）／Nと、Vから白玉が取られる確率N／N＝1との積である。よって、

$p_1=1-(1/N)$

●p_n は、（n－1）回目に黒玉がUにあってn回目が白球同志の交換になるか、（n－1）回目に黒玉がVにあってn回目がVの黒玉とUの白球の交換になるかのいずれかで、両者は排反する。従って、$p_{n-1}+q_{n-1}=1$　とすると

$$p_n=p_{n-1}\cdot\frac{N-1}{N}\cdot\frac{N}{N}+q_{n-1}\cdot\frac{N}{N}\cdot\frac{1}{N}$$

$$=p_{n-1}\cdot\left(1-\frac{1}{N}\right)+(1-p_{n-1})\cdot\frac{1}{N}$$

$$=\left(1-\frac{2}{N}\right)\cdot p_{n-1}+\frac{1}{N}$$

$$p_n=\left(1-\frac{2}{N}\right)\cdot p_{n-1}+\frac{1}{N} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

$$p_{n-1}=\left(1-\frac{2}{N}\right)\cdot p_{n-2}+\frac{1}{N}$$

辺毎に減じて、

$$p_n-p_{n-1}=\left(1-\frac{2}{N}\right)\cdot(p_{n-1}-p_{n-2})$$

$$=\left(1-\frac{2}{N}\right)^2\cdot(p_{n-2}-p_{n-3})$$

$$=\left(1-\frac{2}{N}\right)^{n-1}\cdot(p_1-p_0)$$

$$=-\frac{1}{N}\cdot\left(1-\frac{2}{N}\right)^{n-1}$$

①式を代入して p_n について解けば、

$$p_n=\frac{1}{2}\cdot\left\{1+\left(1-\frac{2}{N}\right)^n\right\} \qquad (n\geqq 2)$$

3．

（1）$P(U=u)=P(X=u,\ Y\geqq u)+P(X>u,\ Y=u)$

$$=P(X=u)\cdot P(Y\geqq u)+P(X>u)\cdot P(Y=u)$$

$$=pq^{u}\left(\sum_{j=0}^{\infty}pq^{u+j}\right)+\left(\sum_{k=1}^{\infty}pq^{u+k}\right)pq^{u}$$

$$=p^{2}q^{2u}\{1/(1-q)\}+p^{2}q^{2u}\{q/(1-q)\}$$

$$=pq^{2u}(1+q)$$

$\therefore P(U=u)=pq^{2u}(1+q)$　　　$(u=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$

（2）$V=X-Y$のとり得る値は、$v=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots\cdots$である。

(ｱ) $v\geqq0$のとき

$$P(V=v)=\sum_{y=0}^{\infty}P(X=y+v,\ Y=y)$$　（Σは以下同じ）

$$=\Sigma P(X=y+v)P(Y=y)$$

$$=\Sigma pq^{y+v}\cdot pq^{y}$$

$$=p^{2}q^{v}\,\Sigma q^{2y}$$

$$=p^{2}q^{v}\cdot\{1/(1-q^{2})\}$$

$$=pq^{v}/(1+q)$$

(ｲ) $v<0$のとき

$$P(V=v)=\sum_{x=0}^{\infty}P(X=x,\ Y=x-v)$$　（Σは以下同じ）

$$=\Sigma P(X=x)P(Y=x-v)$$

$$=\Sigma pq^{x}\cdot pq^{x-v}$$

$$=p^{2}q^{-v}\Sigma q^{2x}$$

$$=p^{2}q^{-v}\cdot\{1/(1-q^{2})\}$$

$$=pq^{-v}/(1+q)$$

従って、$P(V=v)=\dfrac{pq^{|v|}}{(1+q)}$　　　$(v=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots\cdots)$

(3) $P(U=u,\ V=v)=P(\min(X,\ Y)=u,\ X-Y=v)$

(ｱ) $v \geqq 0$のとき

$X-Y=v \geqq 0$より　$\min(X,\ Y)=Y$であるから

$$
\begin{aligned}
P(U=u、V=v) &= P(Y=u,\ X-Y=v) \\
&= P(X=u+v,\ Y=u) \\
&= P(X=u+v)\cdot P(Y=u) \\
&= pq^{u+v}\ pq^{u} \\
&= p^{2}\ q^{2u+v}
\end{aligned}
$$

(ｲ) $v<0$のとき

$X-Y=v<0$より　$\min(X,\ Y)=X$であるから

$$
\begin{aligned}
P(U=u、V=v) &= P(X=u,\ X-Y=v) \\
&= P(X=u,\ Y=u-v) \\
&= P(X=u)\cdot P(Y=u-v) \\
&= pq^{u}\ pq^{u-v} \\
&= p^{2}\ q^{2u-v}
\end{aligned}
$$

従って、$P(U=u、V=v)=p^{2}\ q^{2u+|v|}$

$$
\begin{aligned}
&= pq^{2u}(1+q)\cdot\{pq^{|v|}/(1+q)\} \\
&= P(U=u)\cdot P(V=v)
\end{aligned}
$$

即ち、UとVとは独立である。

4.

(1) sの恒等式　$(1+s)^{K}\cdot(1+s)^{M-K}=(1+s)^{M}$において、両辺の$s^{n}$の係数が等しいことから、

$$
\sum_{r=0}^{\min(K,n)}\binom{K}{r}\binom{M-K}{n-r}=\binom{M}{n} \qquad \therefore \sum_{r=0}^{\min(K,n)} P(X=r)=1
$$

(2)
$$
E(X)=\sum_{r=0}^{\min(K,n)} r\cdot\binom{K}{r}\binom{M-K}{n-r}\Big/\binom{M}{n} \qquad r-1=yとして
$$

$$
=(n\cdot K/M)\sum_{y=0}^{\min(K,n)-1}\binom{K-1}{y}\binom{M-1-K-1}{n-1-y}\Big/\cdot\binom{M-1}{n-1}
$$

$$=\frac{n\cdot K}{M}$$

(3)
$$E[X(X-1)]=\sum_{r=0}^{\min(K,n)} r(r-1)\binom{K}{r}\binom{M-K}{n-r}\Big/\binom{M}{n}$$

$$=n(n-1)\frac{K(K-1)}{M(M-1)}\sum_{y=0}^{\min(K,n)-2}\binom{K-2}{y}\binom{M-2-K+2}{n-2-y}\binom{M-2}{n-2}$$

$$=\frac{n(n-1)\cdot K(K-1)}{M(M-1)}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X)&=E[X(X-1)]+E(X)-\{E(X)\}^2\\&=\frac{n(n-1)K(K-1)}{M(M-1)}+\frac{nK}{M}-\frac{n^2K^2}{M^2}\\&=\frac{nK(M-K)(M-n)}{M^2(M-1)}\end{aligned}$$

5.

(ｱ) $0<a<1$ の場合

$$F(x)-F(x-a)=\begin{cases}0-0=0 & (\quad x<0)\\ p-0=p & (0\leqq x<a)\\ p-p=0 & (a\leqq x<1)\\ 1-p=q & (1\leqq x<a+1)\\ 1-1=0 & (a+1\leqq x)\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\{F(x)-F(x-a)\}dx=\int_{-\infty}^{0}0\,dx+\int_{0}^{a}p\,dx+\int_{a}^{1}0\,dx+\int_{1}^{a+1}q\,dx+\int_{a+1}^{\infty}0\,dx=pa+qa=a$$

(イ) a＝1の場合

$$F(x)-F(x-a)=\begin{cases}0-0=0 & (\quad x<0)\\ p-0=p & (0\leqq x<1)\\ 1-p=q & (1\leqq x<2)\\ 1-1=0 & (2\leqq x)\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\{F(x)-F(x-a)\}dx=\int_{-\infty}^{0}0\,dx+\int_{0}^{1}p\,dx+\int_{1}^{2}q\,dx+\int_{2}^{\infty}0\,dx$$

$$=p+q=1=a$$

(ウ) 1＜aの場合

$$F(x)-F(x-a)=\begin{cases}0-0=0 & (\quad x<0)\\ p-0=p & (0\leqq x<1)\\ 1-0=1 & (1\leqq x<a)\\ 1-p=q & (a\leqq x<a+1)\\ 1-1=0 & (a+1\leqq x)\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\{F(x)-F(x-a)\}dx=\int_{-\infty}^{0}0\,dx+\int_{0}^{1}p\,dx+\int_{1}^{a}1\,dx+\int_{a}^{a+1}q\,dx$$

$$+\int_{a+1}^{\infty}0\,dx=p+(a-1)+q=a$$

従って、いづれの場合も

$$\int_{-\infty}^{\infty}\{F(x)-F(x-a)\}dx=a$$