数　学　I　（問題）

1. 次の各問の $\boxed{}$ に入る答のみを，所定の解答用紙に記入せよ。　　（各問 2.5 点，計20点）

(1) 4個の白玉と5個の赤玉が入っている箱から，無作為に4個を取り出したとき，白玉と赤玉のどちらも含まれる確率は $\boxed{}$ である。

(2) 確率変数 X が幾何分布 $P(X=k)=pq^k$ に従うとき，$P(X=k+n \mid X \geq k) = \boxed{}$ である。ただし，k, n は0または正の整数である。

(3) 確率変数 X のとりうる値を $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 各々に対する確率をそれぞれ $p_1, p_2, \ldots, p_n$ とし，ある実数 c について $\sum_{i=1}^{n}(x_i-c)^2 p_i = \sum_{i=1}^{n}(x_i-c)p_i$ なる関係があるとき，X の分散 $V(X)$ を，X の平均 m と実数 c を用いて表わすと，$V(X)=(m-c)\times \boxed{}$ である。

(4) 裏の出る確率 q の硬貨を L, M, N の3人がこの順に投げて，最初に表を出した者を勝ちとする。L の勝つ確率は $\boxed{}$ である。

(5) 確率変数 X の密度関数 $f(x)$ が

$$f(x)=\begin{cases} 1-\dfrac{x}{2} & (0 \leq x \leq 2) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

のとき，X の中央値（メジアン）は $\boxed{}$ である。

(6) 1回の試行で成功する確率を p，失敗する確率を $q\,(=1-p)$ とする。この試行を続けて試みたとき，r 回目の成功が生ずるまでに起こる失敗の回数を X とすると，$P(X=k)=\boxed{}$ である。ただし，毎回の試行の結果は独立とする。

(7) 毎時0分，20分に電車が発車する駅がある。電車の発車時刻を全然知らない人が，まったく勝手に駅に来て，電車を待つ時間の平均値は $\boxed{}$ 分 $\boxed{}$ 秒である。

(8) 確率空間 Ω 上の確率事象 $H_i, G_j\ (i,j=1,2,\ldots)$ について，$\Omega=\bigcup_{i=1}^{\infty}H_i=\bigcup_{j=1}^{\infty}G_j$，$H_i \cap H_{i'}=\phi\,(i \neq i')$，$G_j \cap G_{j'}=\phi\,(j \neq j')$ とする。いま $P(H_i)=p_i,\ P(G_j \mid H_i)=q_{ji}$ とするとき，$P(H_i \mid G_j)=\boxed{}$ である。

2. 確率変数X,Yの結合確率密度関数を $f(x,y)=\frac{1}{\pi}e^{-x^2-y^2}$ とする。

$$Z=\begin{cases} X+Y & (0<X+Y<1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

として確率変数Zを導入する。このとき，$P(Z=0)$を，$\varphi(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^t e^{-\frac{s^2}{2}}\,ds\ (t>0)$ を用いて表わせ。

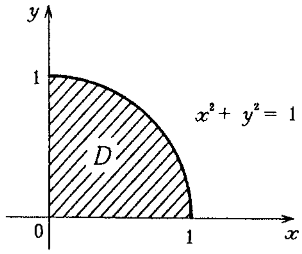
(20点)

3. 図に示す領域D上で一様分布をする2次元確率変数(X,Y)について，つぎの値を計算せよ。

(1) Xの平均値 $E(X)$

(2) 共分散 $Cov(X,Y)$

(3) Xの分散 $V(X)$



(20点)

4. 確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ が互いに独立で，いずれも同じ指数分布に従うとき，$X_1+\frac{1}{2}X_2+\frac{1}{3}X_3+\cdots+\frac{1}{n}X_n$ と $\max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ は同じ確率分布を持つことを証明せよ。 (20点)

5. 初めに黒玉 $(n-1)$ 個と赤玉1個が入っている箱から玉を1個取り出す。黒玉を取り出した場合は黒玉を2個箱に入れ（即ち，黒玉を1個追加する），赤玉を取り出すまでこの試行を繰り返す。赤玉を取り出すまでのこの試行の回数を確率変数Xとする。$\lim_{n\to\infty} P(X\leq \frac{n}{2})$ を求めよ。 (20点)

数学Ⅰ　（解答例）

1．

(1) 排反事象Ｅ，Ｆを次の通り定義すると、

Ｅ＝｛取り出された4個が白玉｝，Ｆ＝｛取り出された4個が赤玉｝

$P(E)=1/{}_9C_4=1/126$,

$P(F)=5/{}_9C_4=5/126$ だから、

求める確率$=P\{(E\cup F)^c\}=1-P(E\cup F)=1-P(E)-P(F)$

$=120/126=20/21$.

(2) $P(X=k+n\,|\,x\geqq k)=P(\{X=k+n\}\cap\{X\geqq k\})/P(X\geqq k)=P(X=k+n)/P(X\geqq k)$

$$=pq^{k+n}/\sum_{i=k}^{\infty}pq^{i}=pq^{k+n}/\{pq^k/(1-q)\}=pq^n \quad .$$

(3)

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-c)^2p_i=\sum_{i=1}^{n}(x_i{}^2-2cx_i+c^2)p_i=\sum_{i=1}^{n}(x_i-c)p_i$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{n}x_i{}^2p_i - 2cm + c^2=m - c$$

$$\therefore \mathrm{Var}(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i{}^2p_i - m^2=m - c + 2cm - c^2 - m^2$$

$$=m - c - (m-c)^2=(m - c)(1 - m + c)$$

従って求める答は、$1 - m + c$.

(4) 表の出る確率をpとすると､求める確率は

$p+q^3p+q^6p+\cdots=p/(1-q^3)=1/(1+q+q^2)$.

(5) 求めるメジアンをtとすると、

$\int_0^t (1-x/2)dx=t - t^2/4=1/2$より　$t^2 - 4t + 2 = 0$ を解いて

$t=2-\sqrt{2}$　（今回は0.586も正解と認めた。）.

(6) $P(X=k)$は、$r+k-1$回中$r-1$回成功，かつ$r+k$回目に成功する確率だから
$P(X=k) = {}_{r+k-1}C_{r-1}p^{r-1}q^kp = {}_{r+k-1}C_{r-1}p^rq^k$
（ ${}_{-r}C_kp^r(-q)^k$ も正解とした。）

(7) X分に駅に到着した人の待ち時間は、$20-X\ (0 \leq X \leq 20)$，
$60-X\ (20 \leq X \leq 60)$で表される。Xの分布を$(0,60)$での一様分布と考えれば、待ち時間の平均値は

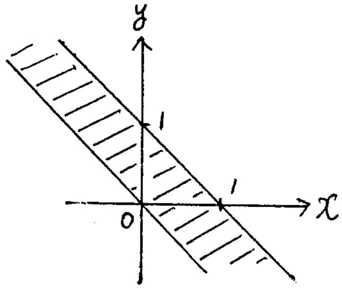
$$\int_0^{20}(20-x)/60dx + \int_{20}^{60}(60-x)/60dx = 1000/60 = 16\frac{2}{3}\text{(分)}$$

求める答は、16分40秒　.

(8)
$$\begin{aligned} P(H_i \mid G_j) &= P(H_i \cap G_j)/P(G_j) \\ &= P(G_j \mid H_i)P(H_i)/\sum_{i=1}^{\infty}P(G_j \mid H_i)P(H_i) \\ &= q_{ji}p_i \Big/ \sum_{i=1}^{\infty}q_{ji}p_i \end{aligned}$$

2．$P(0<Z<1) = \iint_{0<x+y<1}(1/\pi)\exp(-x^2-y^2)dxdy = \{*\}$，

積分範囲は下図斜線部



ここで、$\begin{cases} s=x, \\ t=x+y \end{cases}$ とすると $\begin{cases} -\infty<s<+\infty, \\ 0<t<1 \end{cases}$，

$\begin{cases} x=s, \\ y=t-x, \end{cases} \left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

より、

$$\{*\} = \int_0^1\int_{-\infty}^{+\infty}(1/\pi)\exp\{-s^2-(t-s)^2\}dsdt$$

$$= \int_0^1\int_{-\infty}^{+\infty}(1/\pi)\exp\{-2(s-t/2)^2-t^2/2\}dsdt$$

$$= \int_0^1 \exp(-t^2/2)\int_{-\infty}^{+\infty}(1/\pi)\exp\{-2(s-t/2)^2\}ds\ dt$$

ここで、$2(s-t/2)$をuとおくと $ds/du=1/2$だから

$$=\int_0^1 \exp(-t^2/2)dt \int_{-\infty}^{+\infty} (1/\pi)(1/2)\exp(-u^2/2)du$$

$$=1/(2\pi)^{1/2}\int_0^1 \exp(-t^2/2)dt \int_{-\infty}^{+\infty} 1/(2\pi)^{1/2}\exp(-u^2/2)du$$

$$=\phi(1)\cdot 1 = \phi(1)$$

$\therefore$ $P(Z=0)=1-P(0<Z<1)=1-\phi(1)$.

３．２次元確率変数(X, Y)の密度関数$f(x,y)$はＤが四分円だから

$$f(x,y)=\begin{cases} 4/\pi & (x,y)\in D \\ 0 & (x,y)\notin D \end{cases}$$

である。

(1) $E(X)=(4/\pi)\iint_D x dxdy=(4/\pi)\int_0^1 xdx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy=(4/\pi)\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx$

$$=(4/\pi)\left[(-1/3)\cdot(1-x^2)^{3/2}\right]_0^1$$

$$=4/(3\pi)$$.

(2) $E(Y)=4/(3\pi)$ （ $E(X)$同様に計算する。）

$$E(XY)=(4/\pi)\int_0^1 xdx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} ydy=(4/\pi)\int_0^1 x(1-x^2)/2dx$$

$$=(2/\pi)\left[x^2/2-x^4/4\right]_0^1=1/(2\pi)$$

$\therefore$ $\mathrm{Cov}(X, Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=1/(2\pi)-\{4/(3\pi)\}^2$

$$=(9\pi-32)/(18\pi^2)$$.

(3) $E(X^2)=(4/\pi)\int_0^1 x^2dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy=(4/\pi)\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx$

($x=\sin\theta$ とおく)

$$=(4/\pi)\cdot\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\cos^2\theta d\theta=(4/\pi)\int_0^{\pi/2}\{(\sin 2\theta)/2\}^2 d\theta$$

$$=(1/\pi)\cdot\int_0^{\pi/2}\sin^2 2\theta d\theta$$

$$=(1/2\pi)\cdot\int_0^{\pi/2}(1-\cos 4\theta)d\theta$$

$$=(1/2\pi)\left[\theta-(1/4)\sin 4\theta\right]_0^{\pi/2}=1/4$$

$$\therefore\ \mathrm{Var}(X)=E(X^2)-E(X)^2=1/4-16/(9\pi^2)\quad .$$

4．指数分布の密度関数f(x)を

$$f(x)=\begin{cases} a\exp(-ax) & x>0\text{のとき}\quad(\text{ここに } a>0) \\ 0 & x\leqq 0\text{のとき}\end{cases}$$

とする。

X/kの積率母関数は、

$$E\exp(tx/k)=\int_0^\infty \exp(tx/k)\,a\exp(-ax)dx=\int_0^\infty a\exp\{(t/k-a)x\}dx$$

$$=a/(a-t/k)$$

また、各Xiは独立であるから $Z=\sum_{k=1}^{n} Xk/k$ の積率母関数 $\phi z(t)$ は

$$\phi z(t)=a^n/\prod_{k=1}^{n}(a-t/k)=a^n n!/\prod_{k=1}^{n}(ka-t)$$

一方　$Y=\max(X_1,\cdots,Xn)$ とすると、各Xiは独立であるから

$$P(Y\leqq y)=P\{(X_1\leqq y)\cap\cdots\cap(Xn\leqq y)\}=P(X_1\leqq y)\times\cdots\times P(Xn\leqq y)$$

$$=\{\int_0^y a\exp(-ax)dx\}^n=\{1-\exp(-ay)\}^n$$

従って、Yの密度関数は、$y>0$ で $n\{1-\exp(-ay)\}^{n-1}a\exp(-ay)$

$y\leqq 0$ で 0

と表される。Yの積率母関数 $\phi y(t)$ は $(t<a)$ で以下の通り計算される。

$$\phi y(t)=\int_0^\infty na\exp(ty)\{1-\exp(-ay)\}^{n-1}\exp(-ay)dy$$

$$=na\int_0^\infty \exp\{(t-a)y\}\{1-\exp(-ay)\}^{n-1}dy$$

$$=na\Big[\ \left[\{1/(t-a)\}\cdot\exp\{(t-a)y\}\{1-\exp(-ay)\}^{n-1}\right]_0^\infty$$

$$-\{1/(t-a)\}\cdot(n-1)\cdot a$$

$$\cdot\int_0^\infty \exp(-ay)\cdot\exp\{(t-a)y\}\{1-\exp(-ay)\}^{n-2}dy\ \Big]$$

$$=\{n\cdot(n-1)\cdot a^2/(a-t)\}\cdot\int_0^\infty \exp\{(t-2a)y\}\{1-\exp(-ay)\}^{n-2}dy$$

以下部分積分を繰返して

$$=[n!\,a^n/[(a-t)\times\cdots\times\{(n-1)a-t\}]]\cdot\int_0^\infty \exp\{(t-na)y\}dy$$

$$=a^n n!/\prod_{k=1}^{n}(ka-t)$$

$\phi z(t)=\phi y(t)$であるから $Z=\sum_{k=1}^{n} Xk/k$ と $Y=\max(X_1,\cdots,Xn)$は同じ確率分布を持つことが言えた。

5．$\{X\leqq k\}$の余事象$\{X>k\}$は、初めからk回続けて黒玉の出る事象だから

$P\{X>k\}=\{(n-1)/n\}\cdot\{n/(n+1)\}\times\cdots\times\{(n+k-2)/(n+k-1)\}$

$=(n-1)/(n+k-1)$

$\therefore\ P\{X\leqq k\}=1-(n-1)/(n+k-1)$

いま mを

$(n-1)/2\leqq m\leqq n/2$ ……①

となる自然数とすれば、

$P\{X\leqq n/2\}=P\{X\leqq m\}=1-(n-1)/(n+m-1)$ …②

①に辺々n-1を加えると

$n-1+(n-1)/2\leqq n-1+m\leqq n-1+n/2$

$\therefore\ 3(n-1)/2\leqq n+m-1\leqq 3n/2-1$

$n\geqq2$のとき

$1-(n-1)/\{3(n-1)/2\}\leqq 1-(n-1)/(n+m-1)\leqq 1-(n-1)/(3n/2-1)$

②より

$1/3\leqq P\{X\leqq n/2\}\leqq 1-(n-1)/(3n/2-1)$

$1/3\leqq P\{X\leqq n/2\}\leqq n/(3n-2)$

$\therefore\ n\to\infty$ のとき $P\{X\leqq n/2\}\to1/3$.