保険数学Ⅱ　（問題）

1. 死力 $\mu_x = A + BC^x$ （ A, B, C は定数）のとき

$$ {}^{(\infty)}_{\ t}\bar{V}^{\ 1}_{xy} = \frac{C^x}{C^x + C^y} \cdot {}^{(\infty)}_{\ t}\bar{V}_{xy} $$

を示せ。（ここに ${}^{(\infty)}_{\ t}\bar{V}$ は保険金即時払，保険料連続払の責任準備金を表わす。）

2. 次の給付を行なう，加入年齢 x 歳，保険料払込期間 n 年の年金付終身保険を考える。
   (i) 死亡したとき，保険年度末に 1 を支払う。
   (ii) 第 $n+1$ 保険年度以後の各年度始に生存しているとき，年金額 k を支払う。

この保険の年払純保険料が，加入年齢 x 歳，保険期間 n 年の養老保険（保険金年末払，保険金1）の年払純保険料以下であるとき次の問に答えよ。

(1) k の最大値を求めよ。

(2) $\begin{cases} {}_tV_x = & \text{この年金付終身保険の純保険料式責任準備金} \\ {}_tV_{x:\overline{n}|} = & \text{上記養老保険の純保険料式責任準備金} \end{cases}$

とするとき，次のことを証明せよ。

$$\begin{cases} {}_tV_x \leqq {}_tV_{x:\overline{n}|} & (t \leqq n) \\ {}_tV_x \leqq 1 & (t \geqq n+1) \end{cases}$$

3. 終身保険において，予定利率 i を $i-k$ に変更するとき次のことを証明せよ。

(1) 純保険料が増加する。

(2) 純保険料式責任準備金が増加する。（すべての t（経過年数）について（$t \geqq 1$））

ここに

(i) 保険金年末払，保険料年払（終身払）

(ii) 純保険料式責任準備金は経過年数 t とともに単調増加とする。（予定利率 $i, i-k$ の両方の場合について）

(iii) $0 < k < i$

4. 次の給付を行なう保険期間 n 年の夫婦連生保険を考える。

(i) 契約時よりの経過 t 年で，夫が妻の生存中に死亡した場合保険金 S_t を支払い，以後は保険料の払込を免除する。

(ii) 妻が死亡した場合は夫の生死に関係なく保険金1を支払い，契約は消滅する。
また妻が満期まで生存した場合も保険金1を支払う。

契約時の年齢は夫 x 歳，妻 y 歳とし，保険金即時払，保険料連続払とする。
また死亡表は夫婦とも同一で，付加保険料は考えない。
このとき，次の問に答えよ。

(1) この保険の保険料年額 P，および保険料払込免除後の責任準備金 $\tilde{V}_t$ について算式を記せ。

(2) 経過 t 年で夫婦共に生存している場合の責任準備金 V_t の算式を，将来法および過去法で記せ。この場合 $\tilde{V}_t$ は既知としてよい。

(3) (1), (2)を用いて, $\tilde{V}_t, V_t$ について次の微分方程式が成り立つことを示せ。

$$\frac{d\tilde{V}_t}{dt} = \delta\tilde{V}_t - \mu_{y+t}(1-\tilde{V}_t)$$

$$\frac{dV_t}{dt} = P + \delta V_t - \mu_{x+t}(S_t + \tilde{V}_t - V_t) - \mu_{y+t}(1-V_t)$$

5. 次のA, B, C 3問のうち1問を選んで解答せよ。

A. n 年満期養老保険（保険金年末払, 保険金1, 予定利率 i）の年払純保険料相当額 $P_{x:\overline{n}|}$ を毎年徴収し, 予定利率に基づく蓄積保険料相当額 （ $v\cdot {}_tV_{x:\overline{n}|} - {}_{t-1}V_{x:\overline{n}|}$ ） を別途積み立てて運用する変額保険を考える。（第 t 保険年度の実際利回りを i_t とする。）

この変額保険の給付は次のとおりとする。

(i) 第 t 保険年度の死亡給付…………… $1 + {}_tV'_{x:\overline{n}|} - {}_tV_{x:\overline{n}|}$

(ii) 満期生存給付………………………… ${}_nV'_{x:\overline{n}|}$

ここに

① ${}_tV'_{x:\overline{n}|}$ = 別途積立てた積立金

$({}_0V'_{x:\overline{n}|} = 0,\ {}_tV'_{x:\overline{n}|} > 0\ (t \geqq 1))$

② ${}_tV_{x:\overline{n}|}$ = 予定利率に基づく責任準備金

$({}_0V_{x:\overline{n}|} = 0,\ {}_tV_{x:\overline{n}|} > 0\ (t \geqq 1),\ {}_nV_{x:\overline{n}|} = 1)$

③ $v\cdot {}_tV_{x:\overline{n}|} - {}_{t-1}V_{x:\overline{n}|} > 0\ (t = 1, 2, \ldots, n)$

このとき, 次の問に答えよ。

(1) ${}_{t-1}V'_{x:\overline{n}|} - {}_{t-1}V_{x:\overline{n}|}$ を, i, i_t, ${}_tV'_{x:\overline{n}|}$ および ${}_tV_{x:\overline{n}|}$ を用いて表わせ。

ここに $t = 2, 3, \ldots, n$ とする。

(2) ${}_{t-1}V'_{x:\overline{n}|} = k_{t-1}\cdot {}_{t-1}V_{x:\overline{n}|}$ および ${}_tV'_{x:\overline{n}|} = k_t\cdot {}_tV_{x:\overline{n}|}$ とするとき, $1+i_t$ を i, k_{t-1}, k_t, ${}_{t-1}V_{x:\overline{n}|}$ および ${}_tV_{x:\overline{n}|}$ を用いて表わせ。ここに $t = 2, 3, \ldots, n$ とする。

B. ある企業の従業員について, x 歳の従業員数が常に ℓ_x で（定常状態を仮定する。）, また x 歳の給与が B_x で表わされるものとし, ℓ_x および B_x は x について微分可能とする。また定年年齢を ω 歳, 入社年齢を e 歳とするとき, 次の問に答えよ。ただし $\ell_\omega \neq 0$ とする。

(1) e 歳で入社した従業員の退職時平均給与を $B_e + f(e)$ と表わしたとき, $f(e)$ はどのように表わされるか。

(2) B_x が $B_x = ax + b$ と表わせるとき, 従業員に関する次の資料から a および b を求めよ。

入社年齢	20歳
平均年齢	35歳
平均給与	25万円
退職時平均勤続年数	20年
退職時平均給与	30万円

C.　ある保険会社が n 件の次のような保険契約を保有しているものとする。

(i)　1契約について年間の保険事故の発生回数はポアソン分布（平均値 ν ）に従うものとする。

(ii)　保険事故が発生したときの支払保険金額の分布は，指数分布に従うものとし，その確率密度関数 $f(x)$ が，$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ と表わされる。

このとき，次の問に答えよ。

(1)　この保険会社が年間に支払う支払保険金額の平均値を求め，契約1件当りの年払純保険料を求めよ。（予定利率は，考慮しないものとする。）

(2)　(1)の純保険料 P に対し，契約1件当り $(1+\theta)P$ を徴収するものとする。

この保険会社の年間収支が正となる確率を b 以上としたいとき，θ をどのように決めればよいか。ここでは，支払総保険金額 S の分布は正規分布で近似できるとし，

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx=b \qquad \text{とする。}$$

保険数学 II （解答例）

1．

$$\bar{A}^{1}_{xy} = \int_0^\infty v^t {}_tp_{xy}\,\mu_{x+y}\,dt = \int_0^\infty v^t {}_tp_{xy}(A + BC^{x+t})dt$$

$$= A\int_0^\infty {}_tp_{xy}dt + \frac{C^x}{C^x + C^y}\int_0^\infty v^t {}_tp_{xy}(BC^{x+t} + BC^{y+t})dt$$

$$= A\bar{a}_{xy} + \frac{C^x}{C^x + C^y}\int_0^\infty v^t {}_tp_{xy}(\mu_{x+t} + \mu_{y+t} - 2A)dt$$

$$= A\bar{a}_{xy} + \frac{C^x}{C^x + C^y}(\bar{A}_{xy} - 2A\bar{a}_{xy})$$

$$= \frac{C^x}{C^x + C^y}\bar{A}_{xy} - \frac{C^x - C^y}{C^x + C^y}A\bar{a}_{xy}$$

$${}^{(\infty)}\bar{P}^{1}_{xy} = \frac{\bar{A}^{1}_{xy}}{\bar{a}_{xy}} = \frac{C^x}{C^x + C^y}\,{}^{(\infty)}\bar{P}_{xy} - \frac{C^x - C^y}{C^x + C^y}A$$

$$\therefore\quad {}^{(\infty)}_{t}\bar{V}^{1}_{xy} = \bar{A}^{1}_{x+t:y+t} - {}^{(\infty)}\bar{P}^{1}_{xy}\bar{a}_{x+t:y+t}$$

$$= \left\{\frac{C^{x+t}}{C^{x+t} + C^{y+t}}\bar{A}_{x+t:y+t} - \frac{C^{x+t} - C^{y+t}}{C^{x+t} + C^{y+t}}A\bar{a}_{x+t:y+t}\right\}$$

$$- \left\{\frac{C^x}{C^x + C^y}\,{}^{(\infty)}\bar{P}_{xy} - \frac{C^x - C^y}{C^x + C^y}\bar{a}_{x+t:y+t}\right\}$$

$$= \frac{C^x}{C^x + C^y}(\bar{A}_{x+t:y+t} - {}^{(\infty)}\bar{P}_{xy}\bar{a}_{x+t:y+t})$$

$$= \frac{C^x}{C^x + C^y}\,{}^{(\infty)}_{t}V_{xy}$$

(以上)

2．(1)　年金付終身保険および養老保険の年払純保険料をP_xおよび$P_{x:\overline{n}|}$とおくと、それぞれ次式で表わせる。

$$P_x = \frac{A_x + k\ {}_{n|}\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{A_x + k A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}\ \ddot{a}_{x+n}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

$$= \frac{A_{x:\overline{n}|}^{1} + A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}\ (A_{x+n} + k\ \ddot{a}_{x+n})}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

$$P_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{A_{x:\overline{n}|}^{1} + A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

また、$A_x = 1 - d\ \ddot{a}_x$ であるから

$$P_{x:\overline{n}|} - P_x = \frac{A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\ (1 - A_{x+n} - k\ \ddot{a}_{x+n})$$

$$= (d - k)\ \frac{A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}\ \ddot{a}_{x+n}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \qquad \cdots\cdots Ⓐ$$

$P_{x:\overline{n}|} \geqq P_x$ であるから$d \geqq k$となり、kの最大値は、dである。

(2)① $t \leqq n$のとき、${}_tV_x \leqq {}_tV_{x:\overline{n|}}$を証明する。

$${}_tV_x = A_{x+t} + k \cdot {}_{n-t|}\ddot{a}_{x+t} - P_x\,\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}$$

$$= A^{1}_{x+t:\overline{n-t|}} + A_{x+t:\overline{n-t|}}^{\ \ \ \ 1}\ (A_{x+n} + k\,\ddot{a}_{x+n}) - P_x\,\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}$$

$${}_tV_{x:\overline{n|}} = A_{x+t:\overline{n-t|}} - P_{x:\overline{n|}}\,\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}$$

$$= A^{1}_{x+t:\overline{n-t|}} + A_{x+t:\overline{n-t|}}^{\ \ \ \ 1} - P_{x:\overline{n|}}\,\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}$$

$${}_tV_{x:\overline{n|}} - {}_tV_x = A_{x+t:\overline{n-t|}}^{\ \ \ \ 1}\,(1 - A_{x+n} - k\,\ddot{a}_{x+n}) - (P_{x:\overline{n|}} - P_x)\,\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}$$

$$= (d-k)\,A_{x+t:\overline{n-t|}}^{\ \ \ \ 1}\,\ddot{a}_{x+n} - (P_{x:\overline{n|}} - P_x)\,\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}} = Ⓑ$$

Ⓐより、$(d-k)\ \ddot{a}_{x+n} = (P_{x:\overline{n|}} - P_x)\ \dfrac{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}{A_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1}}$ であるから、

$$Ⓑ = (P_{x:\overline{n|}} - P_x)\left(\frac{A_{x+t:\overline{n-t|}}^{\ \ \ \ 1}\ \ddot{a}_{x:\overline{n|}}}{A_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1}} - \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}\right) = Ⓒ$$

$A_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1} = A_{x:\overline{t|}}^{\ \ 1}\ A_{x+t:\overline{n-t|}}^{\ \ \ \ 1}$，$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \ddot{a}_{x:\overline{t|}} + A_{x:\overline{t|}}^{\ \ 1}\ \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}$ であるから

$$Ⓒ = (P_{x:\overline{n|}} - P_x)\ \frac{\ddot{a}_{x:\overline{t|}}}{A_{x:\overline{t|}}^{\ \ 1}} = (P_{x:\overline{n|}} - P_x)\ /\,P_{x:\overline{t|}}^{\ \ 1} \geqq 0$$

従って、${}_tV_x \leqq {}_tV_{x:\overline{n|}}$となる。

② $t \geqq n$のとき、${}_tV_x \leqq 1$を証明する。

$${}_tV_x = A_{x+t} + k\,\ddot{a}_{x+t}$$

$$= 1 - d\,\ddot{a}_{x+t} + k\,\ddot{a}_{x+t}$$

$$= 1 - (d-k)\ \ddot{a}_{x+t} \leqq 1$$

従って、${}_tV_x \leqq 1$となる。

(以上)

3．(1) ファクラーの再帰方程式は

$$({}_tV+P)\ (1+i)={}_{t+1}V+q_{x+t}\ (1-{}_{t+1}V) \qquad \cdots\cdots①$$

$$({}_tV'+P')\ (1+i-k)={}_{t+1}V'+q_{x+t}\ (1-{}_{t+1}V') \qquad \cdots\cdots②$$

②式は、

$$({}_tV+\Delta_tV+P+\Delta P)(1+i-k)={}_{t+1}V+\Delta_{t+1}V+q_{x+t}(1-({}_{t+1}V+\Delta_{t+1}V)) \qquad \cdots\cdots③$$

③－①は、

$$(\Delta_tV+\Delta P)(1+i)+({}_tV+\Delta_tV+P+\Delta P)(-k)=(1-q_{x+t})\Delta_{t+1}V$$

$$(\Delta_tV+\Delta P)(1+i)-(1-q_{x+t})\Delta_{t+1}V=-({}_tV+\Delta_tV+P+\Delta P)(-k)$$

$$=({}_tV+\Delta_tV+P+\Delta P)k \qquad \cdots\cdots④$$

④式の左辺に vD_{x+t} を乗じて、$t=0$ から $t=\omega-x$ まで加えると、左辺は

$$\sum_{t=0}^{\omega-x}\left\{(\Delta_tV+\Delta P)D_{x+t}-\frac{\ell_{x+t+1}}{\ell_{x+t}}\ vD_{x+t}\ \Delta_{t+1}V\right\}$$

$$=\sum_{t=0}^{\omega-x}(\Delta_tVD_{x+t}-\Delta_{t+1}VD_{x+t+1})+\Delta P\sum_{t=0}^{\omega-x}D_{x+t}$$

$$=\Delta P\cdot N_x \qquad (\because\ \ \Delta_0V=\Delta_{\omega-x+1}V=0)$$

左辺＝右辺より

$$\Delta P\cdot N_x=k\sum_{t=0}^{\omega-x}vD_{x+t}\ ({}_tV_x+\Delta_tV+P+\Delta P) \qquad \cdots\cdots⑤$$

ここに　${}_tV_x+\Delta_tV+P+\Delta P>0$

よって　$\Delta P>0$

(2) ③−①より

$({}_tV+P)(-k)+(\Delta_tV+\Delta P)(1+i-k)=\Delta_{t+1}V+q_{x+t}(-\Delta_{t+1}V)$

$p_{x+t}\Delta_{t+1}V=(\Delta_tV+\Delta P)(1+i')-k({}_tV+P)$

両辺に $v'D'_{x+t}$を乗じて

$D'_{x+t+1}\Delta_{t+1}V=(\Delta_tV+\Delta P)D'_{x+t}-v'D'_{x+t}k({}_tV+P)$ ・・・・⑥

$c(t)=-k({}_tV+P)$

$f(t)=D'_{x+t}\Delta_tV$ （Δ_tVの符号は$f(t)$の符号と一致）

$g(t)=D'_{x+t}\Delta P+v'D'_{x+t}c(t)=D'_{x+t}(\Delta P+v'c(t))$ とすると

⑥式は $\Delta f(t)=g(t)$ （$\Delta f(t)=f(t+1)-f(t)$）

$f(0)=f(\omega-x)=0$より、$g(t)$ （$=\Delta f(t)$）はつねに正あるいはつねに負ということはない。

$c(t)<0$で ${}_tV$が単調増加なので$c(t)$は単調減少。よって$g(t)$の符号は＋から−へ１回だけ符号変換する。

よって$f(t)$は最初増加し、あと減少して、$f(t)>0$。

したがって $\Delta_tV>0$

（以上）

4. (1)

$$P = \frac{\int_0^n v^t \cdot S_t \cdot {}_tp_{xy} \cdot \mu_{x+t}\, dt + \bar{A}_{y:\overline{n}|}}{\bar{a}_{xy:\overline{n}|}}$$

$$\tilde{V}_t = \bar{A}_{y+t:\overline{n-t}|}$$

(2) (将来法)

V_t = (将来の給付現価) − (将来の収入現価)

$$= \int_0^{n-t} v^\tau \cdot S_{t+\tau} \cdot {}_\tau p_{x+t:y+t} \cdot \mu_{x+t+\tau}\, d\tau + \tilde{V}_t - P\bar{a}_{x+t:y+t:\overline{n-t}|}$$

(過去法)

契約時より経過 t 年までの収支を、契約時での現価で考えると

(収入現価) $= P\bar{a}_{xy:\overline{t}|}$

(給付現価) $= \int_0^t v^\tau \cdot S_\tau \cdot {}_\tau p_{xy}\mu_{x+\tau}\, d\tau + \bar{A}^{\ \ 1}_{y:\overline{t}|}$

$$+ v^t{}_tp_{xy}V_t + v^t(1 - {}_tp_x)\ {}_tp_y\tilde{V}_t$$

これより $A^{\ \ 1}_{y:\overline{t}|} + v^t{}_tp_y\tilde{V}_t = \bar{A}_{y:\overline{n}|}$ を使って整理すると

$$v^t{}_tp_{xy}(V_t - \tilde{V}_t) = \bar{P}a_{xy:\overline{t}|} - \int_0^t v^\tau \cdot S_\tau \cdot {}_\tau p_{xy}\mu_{x+\tau}\, d\tau - \bar{A}_{y:\overline{n}|}$$

・・・・㊟

$$\therefore\ V_t = \frac{1}{v^t{}_tp_{xy}}\left\{P\bar{a}_{xy:\overline{t}|} - \int_0^t v^\tau \cdot S_\tau \cdot {}_\tau p_{xy}\mu_{x+\tau}\, d\tau - \bar{A}_{x:\overline{n}|}\right\} + \tilde{V}_t$$

(3)　(1)より$\tilde{V}_t = \bar{A}_{y+t:\overline{n-t}|}$であるが、これを過去法で考えると

(2)中の式　$\bar{A}^{1}_{y:\overline{t}|} + v^t {}_tp_y \tilde{V}_t = \bar{A}_{y:\overline{n}|}$　となる。

これをtについて微分すると

$$v^t {}_tp_y \mu_{y+t} + v^t {}_tp_y \left(-\delta \tilde{V}_t - \mu_{y+t}\tilde{V}_t + \frac{d\tilde{V}_t}{dt}\right) = 0$$

これより　$$\frac{d\tilde{V}_t}{dt} = \delta \tilde{V}_t - \mu_{y+t}(1 - \tilde{V}_t)$$

㊟において、両辺のtについての微分を考える。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\{v^t {}_tp_{xy}(V_t - \tilde{V}_t)\} &= -\delta v^t {}_tp_{xy}(V_t - \tilde{V}_t) \\ &\quad - v^t {}_tp_{xy}(\mu_{x+t} + \mu_{y+t})(V_t - \tilde{V}_t) \\ &\quad + v^t {}_tp_{xy}\frac{d}{dt}(V_t - \tilde{V}_t) \\ &= v^t {}_tp_{xy}\left\{\frac{d}{dt}(V_t - \tilde{V}_t) - (\mu_{x+t} + \mu_{y+t} + \delta)(V_t - \tilde{V}_t)\right\}\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}(P\bar{a}_{xy:\overline{t}|}) = P\frac{d}{dt}\left(\int_0^t v^\tau {}_\tau p_{xy} d\tau\right) = P\, v^t {}_tp_{xy}$$

であるから　㊟の微分の結果は

$$v^t {}_tp_{xy}\left\{\frac{d}{dt}(V_t - \tilde{V}_t) - (\mu_{x+t} + \mu_{y+t} + \delta)(V_t - \tilde{V}_t)\right\}$$

$$= v^t {}_tp_{xy}P - v^t {}_tp_{xy}\mu_{x+t}\, S_t$$

となる。これより

$$\frac{d}{dt}(V_t - \tilde{V}_t) = (\mu_{x+t} + \mu_{y+t} + \delta)(V_t - \tilde{V}_t) + P - \mu_{x+t}\, S_t$$

が成り立つ。さらに　$\dfrac{d\tilde{V}_t}{dt} = \delta \tilde{V}_t - \mu_{y+t}(1 - \tilde{V}_t)$　であるから

$$\frac{dV_t}{dt} = P + \delta V_t - \mu_{x+t}(S_t + \tilde{V}_t - V_t) - \mu_{y+t}(1 - V_t)$$

が成り立つ。

(以上)

5－A.

(1) 予定利率に基づく蓄積保険料相当額＝ $v\cdot {}_{t}V_{x:\overline{n}|} - {}_{t-1}V_{x:\overline{n}|} > 0 \quad (t \geqq 1)$

であるから、定義により

$$\{ {}_{t-1}V'_{x:\overline{n}|} + (v\cdot {}_{t}V_{x:\overline{n}|} - {}_{t-1}V_{x:\overline{n}|}) \} (1+i_t) = {}_{t}V'_{x:\overline{n}|} \qquad (t \geqq 1)$$

したがって、

$$ {}_{t-1}V'_{x:\overline{n}|} - {}_{t-1}V_{x:\overline{n}|} = \frac{{}_{t}V'_{x:\overline{n}|}}{1+i_t} - \frac{{}_{t}V_{x:\overline{n}|}}{1+i}$$

(2) (1)の等式で、 ${}_{t-1}V'_{x:\overline{n}|} = k_{t-1}\cdot {}_{t-1}V_{x:\overline{n}|}$, ${}_{t}V'_{x:\overline{n}|} = k_t \cdot {}_{t}V_{x:\overline{n}|}$

を代入すると、

$$(k_{t-1}-1)\cdot {}_{t-1}V_{x:\overline{n}|} = {}_{t}V_{x:\overline{n}|}\left(\frac{k_t}{1+i_t} - \frac{1}{1+i}\right)$$

$$(1+i_t)\{ {}_{t}V_{x:\overline{n}|} + (k_{t-1}-1)(1+i){}_{t-1}V_{x:\overline{n}|} \} = k_t(1+i)\cdot {}_{t}V_{x:\overline{n}|}$$

ここに、$A = {}_{t}V_{x:\overline{n}|} + (k_{t-1}-1)(1+i){}_{t-1}V_{x:\overline{n}|} > 0$ である。

$$\left(\begin{aligned} \because\ A &= (1+i)\left\{\frac{{}_{t}V_{x:\overline{n}|}}{1+i} - {}_{t-1}V_{x:\overline{n}|} + k_{t-1}\cdot {}_{t-1}V_{x:\overline{n}|}\right\} \\ &> (1+i)\left\{\frac{{}_{t}V_{x:\overline{n}|}}{1+i} - {}_{t-1}V_{x:\overline{n}|}\right\} > 0 \end{aligned} \right)$$

したがって、

$$1+i_t = k_t(1+i)\cdot {}_{t}V_{x:\overline{n}|} / A \qquad \cdots\cdots (i)$$

または、直接的に、

$$\begin{aligned} 1+i_t &= {}_{t}V'_{x:\overline{n}|} / \{(v\cdot {}_{t}V_{x:\overline{n}|} - {}_{t-1}V_{x:\overline{n}|}) + {}_{t-1}V'_{x:\overline{n}|}\} \\ &= k_t\cdot {}_{t}V_{x:\overline{n}|} / \left\{\frac{{}_{t}V_{x:\overline{n}|}}{1+i} - {}_{t-1}V_{x:\overline{n}|} + k_{t-1}\cdot {}_{t-1}V_{x:\overline{n}|}\right\} \\ &= k_t(1+i)\cdot {}_{t}V_{x:\overline{n}|} / A \end{aligned}$$

なお、本問の意味としては、前年度および当年度の保険年度末積立金の対予定準備金比率を与えたとき、保険料分解を行わず実際利回りを求めることにある。

(以上)

5－B．

(1)

中途退職者数は、$\int_e^\omega \mu_x \cdot \ell_x\, dx$、これらの者の給与総額は、$\int_e^\omega \mu_x \cdot \ell_x \cdot B_x\, dx$ と書ける。また、定年退職者数は ℓ_ω 、これらの者の給与総額は $\ell_\omega \cdot B_\omega$ であるから $B_e + f(e)$ は、

$$B_e + f(e) = \frac{\int_e^\omega \mu_x \cdot \ell_x \cdot B_x\, dx + \ell_\omega \cdot B_\omega}{\int_e^\omega \mu_x \cdot \ell_x\, dx + \ell_\omega}$$

この分母分子を変形すると

$$\begin{aligned}
(\text{右辺分母}) &= \int_e^\omega -\ell'_x\, dx + \ell_\omega \\
&= \left[-\ell_x\right]_e^\omega + \ell_\omega \\
&= \ell_e \\
(\text{右辺分子}) &= \int_e^\omega -\ell'_x \cdot B_x\, dx + \ell_\omega \cdot B_\omega \\
&= \left[-\ell_x \cdot B_x\right]_e^\omega + \ell_\omega \cdot B_\omega + \int_e^\omega \ell_x \cdot B'_x\, dx \\
&= \ell_e \cdot B_e + \int_e^\omega \ell_x \cdot B'_x\, dx
\end{aligned}$$

よって

$$B_e + f(e) = B_e + \frac{1}{\ell_e} \int_e^\omega \ell_x \cdot B'_x\, dx$$

これから

$$f(e) = \frac{1}{\ell_e} \int_e^\omega \ell_x \cdot B'_x\, dx$$

(2) (1)から、$B_e + f(e) = ae + b + a \cdot \dfrac{1}{\ell_e} \int_e^\omega \ell_x\, dx$

$$= ae + b + a \cdot \overline{e}_e$$

よって、 $40a + b = 300000$ ・・・・①

また、

$$\frac{\int_e^\omega x\, \ell_x\, dx}{\int_e^\omega \ell_x\, dx} = 35, \quad \frac{\int_e^\omega \ell_x \cdot (ax + b)\, dx}{\int_e^\omega \ell_x\, dx} = 250000$$

であるから、

$35a + b = 250000$ ・・・・②

①、②を解くと $a = 10000$、$b = -100000$

（以上）

5－C

確立変数　I，X，Sを　I：1契約について年間の保険事故発生回数

X：1契約あたりの支払い保険金額

S：保険会社が支払う総保険金額

とするとき、

$$\Pr(I=k) = \frac{e^{-\nu}\,\nu^{k}}{k!}$$

また、（X｜I＝1）は、密度関数が$\lambda\,exp(-\lambda x)$なる指数分布である。

一般に、E（X）＝E（E（X｜I））であるから

$$E(X) = E\left(\frac{1}{\lambda} I\right) = \frac{\nu}{\lambda} \qquad \cdots\cdots ①$$

また、Var（X）＝Var（E（X｜I））＋E（Var（X｜I））から

$$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2} Var(I) + \frac{1}{\lambda^2} E(I)$$

$$= \frac{2\nu}{\lambda^2} \qquad \cdots\cdots ②$$

これから、

(1)　$E(S) = n \cdot E(X) = \dfrac{n\nu}{\lambda}$　　よって、　$P = \dfrac{\nu}{\lambda}$

(2)　$\Pr\{S \leqq (1+\theta)\cdot np\} \geqq b$

$\Pr\{S \leqq (1+\theta)\cdot E(S)\} \geqq b$

ここで、Sは正規分布で近似できるとしているから

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi Var(S)}} \int_{-\infty}^{(1+\theta)E(S)} exp\left\{-\frac{(x-E(S))^2}{2Var(S)}\right\} dx \geqq b$$

これを変形すると

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{A} exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \geqq b \qquad \left(\text{ただし}\quad A = \frac{\theta E(S)}{\sqrt{Var(S)}}\right)$$

よって　①、②から　A≧a

$$\therefore\ \theta \geqq \sqrt{\frac{2}{n\nu}} \cdot a$$

（以上）