保険数学I　（問題）

1. 次の(1)～(10)までについて，それぞれ五つの選択肢の中に正しいものが一つあるので，それを所定の解答用紙に，例えば(A)とか(D)のように記号で記入せよ。（40点）

(1)　$i=0$ のとき，$(I\bar{A})_x$ を表わすものは次のうちどれか。

(A) $\sum_{t=0}^{\infty} \overset{\circ}{e}_{x+t}$　(B) $\sum_{t=0}^{\infty} {}_tp_x$　(C) $1+\overset{\circ}{e}_x$　(D) $\overset{\circ}{e}_x$　(E) e_x

(2)　$\frac{\partial \overset{\circ}{e}_{xy}}{\partial x}$ を表わす式は次のうちどれか。

(A) $\mu_y \overset{\circ}{e}_{xy} - {}_{\infty}q_{xy}^{\ \ 1}$　(B) $\mu_x \overset{\circ}{e}_{xy} - {}_{\infty}q_{xy}$　(C) $\mu_x \overset{\circ}{e}_{xy} - {}_{\infty}q_{xy}^{\ \ 1}$

(D) $\mu_y \overset{\circ}{e}_{xy} - {}_{\infty}q_{\overset{1}{x}y}$　(E) $\mu_x \overset{\circ}{e}_{xy} - {}_{\infty}q_{\overset{1}{x}y}$

(3)　次の式のうちで ${}_tV_{\overline{n}|}$ に等しくないものはどれか。
（ ${}_tV_{\overline{n}|}$ ，$P_{\overline{n}|}$ はそれぞれ定期積金の積立金，掛金とする。）

(A) $\frac{S_{\overline{t}|}}{S_{\overline{n}|}}$　(B) $v^{n-t} - P_{\overline{n}|} \cdot \ddot{a}_{\overline{n-t}|}$　(C) $P_{\overline{n}|}(S_{\overline{t+1}|} - 1)$

(D) $1 - \frac{\ddot{a}_{\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{\overline{n}|}}$　(E) $1 - \frac{\ddot{a}_{\overline{t}|}}{\ddot{a}_{\overline{n}|}}$

(4)　総資産の額は時間 t の2次式と仮定し，年度始，年央，年度末の残高をそれぞれ A, B, C とする。利力 δ は一定とし，年度内の利息収入を I とするとき，δ を表わす式は次のうちどれか。

(A) $\frac{3I}{A+B+C}$　(B) $\frac{4I}{A+2B+C}$　(C) $\frac{5I}{A+3B+C}$　(D) $\frac{6I}{A+4B+C}$　(E) $\frac{7I}{A+5B+C}$

(5)　$\overset{\circ}{e}_x = a+bx$ 　のとき μ_x を表わす式は次のうちどれか。

(A) $\frac{1+b}{a+bx}$　(B) $\frac{1+a}{a+bx}$　(C) $\frac{a+b}{1+bx}$　(D) $\frac{a}{1+bx}$　(E) $\frac{b}{a+bx}$

(6)　ℓ_x が x の2次式と仮定すると，μ_x を表わす式は次のうちどれか。

(A) $\frac{\ell_x + \ell_{x+1}}{2\ell_x}$　(B) $\frac{\ell_{x-1} + \ell_{x+1}}{2\ell_x}$　(C) $\frac{\ell_{x+1} - \ell_{x-1}}{2\ell_x}$　(D) $\frac{\ell_x - \ell_{x+1}}{2\ell_x}$　(E) $\frac{\ell_{x-1} - \ell_{x+1}}{2\ell_x}$

(7)　$i=6\%$, $P_{x:\overline{20}|} = 0.028$, ${}_{10}V_{x:\overline{20}|} = 0.357$ のとき，$P_{x+10:\overline{10}|}$ の値に最も近いものは次のうちどれか。

(A) 0.060　(B) 0.065　(C) 0.070　(D) 0.075　(E) 0.080

(8)　${}_tV_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = 0.450$, ${}_{t+1}V_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = 0.583$, $\ell_{x+t} = 50000$, $\ell_{x+t+1} = 45000$. $i=5\%$のとき，$P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$ の値に最も近いものは，次のうちどれか。

(A) 0.0434　(B) 0.0455　(C) 0.0476　(D) 0.0497　(E) 0.0518

(9)　次の式のうち，正しくないものはどれか。

(A) $q_{\overline{xy}} = q_x + q_y - q_{xy}$　(B) ${}_nq_{xy} = 1 - {}_np_{xy}$

(C) ${}_{t|}q_{xy} = 1 - p_{x+t:y+t}$　(D) $q_{xy} = 1 - p_{xy}$

(E) ${}_{t|}q_{\overline{xy}} = {}_{t|}q_x + {}_{t|}q_y - {}_{t|}q_{xy}$

(10) $P_{x:\overline{n}|} = 0.02803$, ${}_tV_{x:\overline{n}|} = 0.36883$, ${}_{t+1}V_{x:\overline{n}|} = 0.41768$, $q_{x+t} = 0.00173$ および $i = 5.5\%$ とするとき，第 $t+1$ 保険年度の危険保険料の値に最も近いものは，次のうちどれか（保険金年末払）。

(A) 0.00095 (B) 0.00098 (C) 0.00100 (D) 0.00102 (E) 0.00105

2. ℓ_x が x の一次式で表わされるとき， $A^1_{x:\overline{n}|}$, $\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}$ を ${}_nq_x(= 1 - {}_np_x)$ を用いて表わし，$\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} = \frac{i}{\delta} \cdot A^1_{x:\overline{n}|}$ であることを示せ。

(20点)

3. 次の給付を行う h 年保証終身年金保険がある。ここに，加入年齢は x 歳，保険料払込期間は m 年，保険料払込期間終了後から年金支払開始時前までの保険料払込済期間は n 年，年金支払開始時の年金現価を F ，年金は年始払とする。

① 保険料払込期間中の死亡に対しては，第 t 保険年度の死亡には $\frac{t}{m} \times F$ を死亡保険金として保険年度末に支払う。$(t \leqq m)$

② 保険料払込済期間中の死亡に対しては，年金支払開始時の年金現価 (F) を死亡保険金として保険年度末に支払う。$(m < t \leqq m + n)$

③ 年金支払開始時から最初の h 回目までの年金は生死に関係なく毎年，基本年金額 1 を支払い，$(h+1)$ 回目以降の年金は保険年度始に生存しているときに基本年金額 1 の 5% ずつ毎年増加する年金額を終身支払う。このとき，次の問に答えよ。

(1) 年金支払開始時の年金現価 F を求めよ。

(2) 年払純保険料を F を用いて表わせ。

(20点)

4. 終身払込終身保険（保険金年末払，保険金 1 ）の年払純保険料を P_x ，第 t 年度末純保険料式責任準備金を ${}_tV_x$ とし，また保険期間 t 年の養老保険（保険金年末払，保険金 1 ）の年払純保険料を $P_{x:\overline{t}|}$ とする。このとき，$P^1_{x:\overline{t}|}$ および $P_{x:\overline{t}|}^{\ \ 1}$ のそれぞれを P_x, ${}_tV_x$ および $P_{x:\overline{t}|}$ で表わせ。ただし ${}_tV_x < 1$ とする。

(20点)

保険数学Ⅰ（解答例）

1.

問題番号	解答欄
(1)	(B)
(2)	(E)
(3)	(E)
(4)	(D)
(5)	(A)
(6)	(E)
(7)	(D)
(8)	(D)
(9)	(C)
(10)	(A)

正解は上表のとおりであるが，以下問題を再掲するとともに解法を略記する。

(1)　$i=0$ のとき，　$(I\bar{A})_x$ を表わすものは次のうちどれか。

(A) $\displaystyle\sum_{t=0}^{\infty} \mathring{e}_{x+t}$　(B) $\displaystyle\sum_{t=0}^{\infty} {}_tp_x$　(C) $1+\mathring{e}_x$　(D) $\mathring{e}_x$　(E) e_x

（答）(B)

$$(I\bar{A})_x = \frac{1}{\ell_x}\sum_{t=0}^{\infty}(1+t)\,d_{x+t} = \frac{1}{\ell_x}\sum_{t=0}^{\infty}(1+t)(\ell_{x+t}-\ell_{x+t+1})$$

$$= \frac{1}{\ell_x}\sum_{t=0}^{\infty}\ell_{x+t}$$

(2)　$\frac{\partial \mathring{e}_{xy}}{\partial_x}$ を表わす式は次のうちどれか。

(A) $\mu_y\mathring{e}_{xy} - {}_{\infty}q_{x\overset{1}{y}}$　(B) $\mu_x\mathring{e}_{xy} - {}_{\infty}q_{xy}$　(C) $\mu_x\mathring{e}_{xy} - {}_{\infty}q_{x\overset{1}{y}}$

(D) $\mu_y\mathring{e}_{xy} - {}_{\infty}q_{\overset{1}{x}y}$　(E) $\mu_x\mathring{e}_{xy} - {}_{\infty}q_{\overset{1}{x}y}$

（答）(E)

$$\frac{\partial}{\partial x}\overset{\circ}{e}_{xy} = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty {}_tp_{xy}\, dt = \int_0^\infty {}_tp_y \left(\frac{\partial}{\partial x}{}_tp_x\right) dt$$

$$= \int_0^\infty {}_tp_y \cdot {}_tp_x\,(\mu_x - \mu_{x+t})\, dt$$

$$= \mu_x \int_0^\infty {}_tp_x \cdot {}_tp_y\, dt - \int_0^\infty {}_tp_y \cdot {}_tp_x\, \mu_{x+t}\, dt$$

(3) 次の式のうちで ${}_tV_{\overline{n}|}$ に等しくないものはどれか。

(${}_tV_{\overline{n}|}$, $P_{\overline{n}|}$ はそれぞれ定期積金の積立金，掛金とする。)

(A) $\dfrac{S_{\overline{t}|}}{S_{\overline{n}|}}$　(B) $v^{n-t} - P_{\overline{n}|}\cdot \ddot{a}_{\overline{n-t}|}$　(C) $P_{\overline{n}|}(S_{\overline{t+1}|} - 1)$

(D) $1 - \dfrac{\ddot{a}_{\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{\overline{n}|}}$　(E) $1 - \dfrac{\ddot{a}_{\overline{t}|}}{\ddot{a}_{\overline{n}|}}$

（答） (E)

(4) 総資産の額は時間 t の 2 次式と仮定し，年度始，年央，年度末の残高をそれぞれ A, B, Cとする。利力 δ は一定とし，年度内の利息収入を I とするとき，δ を表わす式は次のうちどれか。

(A) $\dfrac{3I}{A+B+C}$　(B) $\dfrac{4I}{A+2B+C}$　(C) $\dfrac{5I}{A+3B+C}$

(D) $\dfrac{6I}{A+4B+C}$　(E) $\dfrac{7I}{A+5B+C}$

（答） (D)

$f(t) = \alpha + \beta t + \gamma t^2$ とおくと，$f(0) = A$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = B$, $f(1) = C$ より，

$\alpha = A$,　$\beta = -3A + 4B - C$,　$\gamma = 2A - 4B + 2C$。 一方，

$I = \displaystyle\int_0^1 \delta\, f(t)\, dt$　より

$$\delta = \frac{I}{\int_0^1 f(t)\, dt} = \frac{I}{\alpha + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{3}} = \frac{6I}{A + 4B + C}$$

(5) $\mathring{e}_x = a + bx$ のとき μ_x を表わす式は次のうちどれか。

(A) $\dfrac{1+b}{a+bx}$ (B) $\dfrac{1+a}{a+bx}$ (C) $\dfrac{a+b}{1+bx}$ (D) $\dfrac{a}{1+bx}$ (E) $\dfrac{b}{a+bx}$

（答） (A)

$$\mathring{e}_x = \int_0^{\omega-x} {}_tp_x\, dt = \frac{1}{\ell_x}\int_0^{\omega-x} \ell_{x+t}\, dt = a + bx$$

$$\therefore \int_0^{\omega-x} \ell_{x+t}\, dt = \ell_x (a + bx)$$

$x + t$ を t とおいて両辺を x で微分すると

$$-\ell_x = \frac{d\ell_x}{dx}(a + bx)\,\ell_x \cdot b$$

$$\therefore \quad -\frac{1}{\ell_x}\frac{d\ell_x}{dx} = \frac{1+b}{a+bx}$$

(6) ℓ_x が x の 2 次式と仮定すると，μ_x を表わす式は次のうちどれか。

(A) $\dfrac{\ell_x + \ell_{x+1}}{2\ell_x}$ (B) $\dfrac{\ell_{x-1} + \ell_{x+1}}{2\ell_x}$ (C) $\dfrac{\ell_{x+1} - \ell_{x-1}}{2\ell_x}$

(D) $\dfrac{\ell_x - \ell_{x+1}}{2\ell_x}$ (E) $\dfrac{\ell_{x-1} - \ell_{x+1}}{2\ell_x}$

（答） (E)

ℓ_{x+h} ， ℓ_{x-h} をそれぞれ Taylor 展開して差をとると

$$\ell_{x+h} - \ell_{x-h} = 2\left(h\frac{d\ell_x}{dx} + \frac{h^3}{3!}\frac{d^3\ell_x}{dx^3}\cdots\right)$$

三次以上の項を 0 とし， $h = 1$ とおくと

$$\ell_{x+1} - \ell_{x-1} = 2\frac{d\ell_x}{dx}$$

$$\therefore \quad \mu_x = -\frac{1}{\ell_x}\frac{d\ell_x}{dx} = \frac{\ell_{x-1} - \ell_{x+1}}{2\ell_x}$$

(7) $i = 6\%$, $P_{x:\overline{20|}} = 0.028$, ${}_{10}V_{x:\overline{20|}} = 0.357$ のとき, $P_{x+10:\overline{10|}}$ の値に最も近いものは次のうちどれか。

(A) 0.060 (B) 0.065 (C) 0.070 (D) 0.075 (E) 0.080

（答） (D)

$$P_{x+10:\overline{10|}} = \frac{1}{\ddot{a}_{x+10:\overline{10|}}} - d = \frac{1}{\left(1 - {}_{10}V_{x:\overline{20|}}\right)\ddot{a}_{x:\overline{30|}}} - d$$

$$= \frac{P_{x:\overline{20|}} + d}{1 - {}_{10}V_{x:\overline{20|}}} - d = 0.7497\cdots$$

(8) ${}_{t}V_{x:\overline{n|}}^{\,1} = 0.450$, ${}_{t+1}V_{x:\overline{n|}}^{\,1} = 0.583$, $\ell_{x+t} = 50000$, $\ell_{x+t+1} = 45000$, $i = 5\%$ のとき, $P_{x:\overline{n|}}^{\,1}$ の値に最も近いものは, 次のうちどれか。

(A) 0.0434 (B) 0.0455 (C) 0.0476 (D) 0.0497 (E) 0.0518

（答） (D)

$$\left({}_{t}V_{x:\overline{n|}}^{\,1} + P_{x:\overline{n|}}^{\,1}\right)(1+i) = p_{x+t} \cdot {}_{t+1}V_{x:\overline{n|}}^{\,1} \quad \text{より}$$

$$P_{x:\overline{n|}}^{\,1} = 0.04971\cdots$$

（注） 出題では, ℓ_{x+t} , ℓ_{x+t+1} がそれぞれ ℓ_x, ℓ_{x+1} と誤っていましたが, ここでは訂正しておきました。

なお, 採点にあたっては, 受験者には不利とならないように配慮いたしました。

(9) 次の式のうち, 正しくないものはどれか。

(A) $q_{\overline{xy}} = q_x + q_y - q_{xy}$ (B) ${}_{n}q_{xy} = 1 - {}_{n}p_{xy}$

(C) ${}_{t|}q_{xy} = 1 - p_{x+t:y+t}$ (D) $q_{xy} = 1 - p_{xy}$

(E) ${}_{t|}q_{\overline{xy}} = {}_{t|}q_x + {}_{t|}q_y - {}_{t|}q_{xy}$

（答） (C)

(10) $P_{x:\overline{n}|} = 0.02803$, ${}_tV_{x:\overline{n}|} = 0.36883$, ${}_{t+1}V_{x:\overline{n}|} = 0.41768$, $q_{x+t} = 0.00173$ および $i = 5.5\%$ とするとき，第 $t+1$ 保険年度の危険保険料の値に最も近いものは，次のどれか（保険金年末払）。

(A) 0.00095 (B) 0.00098 (C) 0.00100 (D) 0.00102 (E) 0.00105

（答） (A)

危険保険料は $v \cdot q_{x+t}\,(1 - {}_{t+1}V_{x:\overline{n}|}) = 0.000954\cdots$

2. 題意より， $\ell_x = a(x+b)$ とかける。

$$\therefore\ {}_nq_x = 1 - {}_np_x = 1 - \frac{x+n+b}{x+b} = \frac{-n}{x+b}$$

$$\therefore\ x+b = \frac{-n}{{}_nq_x}$$

両辺に a を乗じて， $a(x+b) = \ell_x = \dfrac{-an}{{}_nq_x}$

また， $d_{x+t} = \ell_{x+t} - \ell_{x+t+1} = a(x+t+b) - a(x+t+1+b)$
$= -a$

これらを用いて，

(1) $$A^{1}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{d_{x+t}\cdot v^{t+1}}{\ell_x} = \sum_{t=0}^{n-1}\frac{-a}{\ell_x}\cdot v^{t+1} = -\frac{a}{\ell_x}\cdot v \cdot \frac{1-v^n}{1-v}$$

$$= \frac{{}_nq_x}{n}\cdot\frac{v}{1-v}\cdot(1-v^n) = \frac{{}_nq_x}{i\cdot n}(1-v^n)$$

(2) $$\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t \cdot {}_tp_x \cdot \mu_{x+t}\,dt = \int_0^n v^t\,\frac{-1}{\ell_x}\cdot\left(\frac{d\,\ell_{x+t}}{dt}\right)dt$$

$$= \int_0^n v^t\cdot\frac{-a}{\ell_x}\,dt = \frac{a}{\ell_x}\left[\frac{v^t}{\delta}\right]_0^n = \frac{a}{\ell_x}\left(\frac{v^n}{\delta} - \frac{1}{\delta}\right) = \frac{{}_nq_x}{\delta\cdot n}(1 - v^n)$$

(1), (2)より $\quad \bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} = \dfrac{i}{\delta} \cdot A^{1}_{x:\overline{n}|}$

3. (1) $x+m+n+h=y$ とおくと，保証期間終了後の年金の現価は

$$\{ N_y + 0.05\,(D_y + 2D_{y+1} + 3D_{y+2} + \cdots) \} \,/\, D_{x+m+n}$$

$$= \{ N_y + 0.05\,(N_y + N_{y+1} + N_{y+2} + \cdots) \} \,/\, D_{x+m+n}$$

$$= \{ N_y + 0.05\,S_y \} \,/\, D_{x+m+n}$$

$$\therefore\ F = \ddot{a}_{\overline{h}|} + \frac{1}{D_{x+m+n}}(N_{x+m+n+h} + 0.05\,S_{x+m+n+h})$$

(2) 求める年払純保険料を P とすると，収入現価は $P\,\ddot{a}_{x:\overline{m}|}$

①の給付現価は $\dfrac{F}{m} \cdot \dfrac{1}{D_x}(C_x + 2C_{x+1} + 3C_{x+2} + \cdots + m\,C_{x+m-1})$

$$= \frac{F}{m} \cdot \frac{1}{D_x}\{(M_x - M_{x+m}) + (M_{x+1} - M_{x+m}) + \cdots + (M_{x+m-1} - M_{x+m})\}$$

$$= \frac{F}{m} \cdot \frac{1}{D_x}(M_x + M_{x+1} + \cdots + M_{x+m-1} - mM_{x+m})$$

$$= \frac{F}{m} \cdot \frac{1}{D_x}(R_x - R_{x+m} - mM_{x+m})$$

②の給付現価は $\dfrac{F}{D_x}(M_{x+m} - M_{x+m+n})$

③の給付現価は $\dfrac{D_{x+m+n}}{D_x} \cdot F$

$\therefore$ 収支相等の原則より

$$P = \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}} \cdot \frac{F}{D_x}\{ \frac{1}{m}(R_x - R_{x+m} - mM_{x+m}) + (M_{x+m} - M_{x+m+n}) + D_{x+m+n} \}$$

4. 定義より $P_{x:\overline{t|}}^{\ \ 1} + P_{x:\overline{t|}}^{1} = P_{x:\overline{t|}}$ ....①

一方，過去法の責任準備金は

$$ {}_tV_x = \frac{1}{D_{x+t}}\{P_x(N_x - N_{x+t}) - (M_x - M_{x+t})\} $$

また， $P_{x:\overline{t|}}^{\ \ 1} = \dfrac{D_{x+t}}{N_x - N_{x+t}}$ ， $P_{x:\overline{t|}}^{1} = \dfrac{M_x - M_{x+t}}{N_x - N_{x+t}}$

$$ \therefore \quad {}_tV_x \cdot P_{x:\overline{t|}}^{\ \ 1} + P_{x:\overline{t|}}^{1} = P_x $$ ....②

①，②より $P_{x:\overline{t|}}^{1} = \dfrac{P_x - {}_tV_x \cdot P_{x:\overline{t|}}}{1 - {}_tV_x}$

$$ P_{x:\overline{t|}}^{\ \ 1} = \frac{P_{x:\overline{t|}} - P_x}{1 - {}_tV_x} $$