昭和62年1月12日

数　学　II　(問題)

1. あるさいころを120回投げたところ次のような結果を得た。このとき，各目が出現する確率は等しいといえるか検定せよ。有意水準を0.05とする。

出現した目	1	2	3	4	5	6	計
出現した回数	15	23	21	17	11	33	120

(注) $\chi_5^2(0.05) = 11.07$

2. 分散1の正規母集団$N(m, 1)$の平均値に関する仮説$m=m_0$を検定するのに，大きさnの標本$X_1, \cdots, X_n$を抽出し，

「$m_0 + 0.5 \leq min\, X_i$または$max X_i \leq m_0 - 0.5$なら仮説をすてる」

という検定法を，有意水準0.05以下で用いるためには，標本の大きさnをどのように定めたらよいか。

(注) $u(0.30) = 0.524$, $u(0.35) = 0.385$

3. 正規母集団からとった大きさnの互に独立な標本$X_1, \cdots, X_n$に対して$\dfrac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{\frac{2}{n}}}\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$は母標準偏差$\sigma$の不偏推定量であることを証明せよ。

4. 正規母集団から抽出された大きさ$n = 100$の標本から$\bar{x} = 2.7$および$\sum_{i=1}^{100}(x_i - \bar{x})^2 = 225$を得たとき，仮説$H_0 : \mu_0 = 3$，$\sigma_0^2 = 2.5$を尤度比検定法を用いて有意水準0.01で検定せよ。

(注) $\chi_2^2(0.995) = 0.01$, $\chi_2^2(0.005) = 10.60$, $\log_e 0.9 = -0.10536$

5. 2つの状態1,2をもつマルコフ連鎖$\{X_n ; n \geq 0\}$がある。その推移確率は$p_{11} = p_{22} = p$，$p_{12} = p_{21} = q$ $(0 < p < 1,\ p + q = 1)$であるとする。初期分布が$P(X_0 = 1) = \alpha$，$P(X_0 = 2) = \beta$ $(\alpha + \beta = 1)$の場合，(1) 時点nでの絶対確率$P(X_n = j)$ $(j = 1, 2)$を計算せよ。(2) また，この場合の極限分布を求めよ。

数学 II （解答例）

1． i(i=1,2,…,6)の目が出現する確率をp_iとし、

$$\text{帰無仮説}\quad H_0 : p_i = \frac{1}{6}\quad (i=1,2,\cdots,6)$$

$$\text{対立仮説}\quad H_1 : p_i = \frac{1}{6}\quad (i=1,2,\cdots,6)\ \text{でない}$$

を有意水準 0.05 で検定する。

目の数(i)	度数(f_i)	確率(p_i)	f_i-np_i	$(f_i-np_i)^2$	$(f_i-np_i)^2/np_i$
1	15	1/6	-5	25	1.25
2	23	1/6	3	9	0.45
3	21	1/6	1	1	0.05
4	17	1/6	-3	9	0.45
5	11	1/6	-9	81	4.05
6	33	1/6	13	169	8.45
計	120	1	0	294	14.70

（ただし$n=\sum_{i=1}^{6} f_i=120$）

$\chi^2=\sum_{i=1}^{6}\frac{(f_i-np_i)^2}{np_i}$ は自由度 6−1=5 のχ^2 分布に従っており、その実現値(上記表より得られた値) $\chi^2=14.70$ をχ^2 分布の上側 5 % 点 $\chi^2_5(0.05)$と比較すると

$$\chi^2_5(0.05) = 11.07 < 14.70$$

であるので、帰無仮説H_0は棄却される。

従って、各目の出現確率は等しいとはいえない。

２．正規母集団N(m,1)の平均値mをm_0としたときの

「$m_0+0.5 \leqq \min_i X_i$ または $\max_i X_i \leqq m_0-0.5$」

の確率は

$$P(m_0+0.5\leqq\min_i X_i \text{ または } \max_i X_i\leqq m_0-0.5)$$

$$=P(m_0+0.5\leqq{}^\forall X_i \text{ または } {}^\forall X_i\leqq m_0-0.5)$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{m_0+0.5}^{\infty} e^{-(x-m_0)^2/2}dx\right)^n+\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{m_0-0.5} e^{-(x-m_0)^2/2}dx\right)^n$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0.5}^{\infty} e^{-x^2/2}dx\right)^n+\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-0.5} e^{-x^2/2}dx\right)^n$$

$$=2\times\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0.5}^{\infty} e^{-x^2/2}dx\right)^n$$

と表される。ここで

$$\alpha=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0.5}^{\infty} e^{-x^2/2}dx$$

とおき、$u(\alpha)=0.5$ を満たすαを求める。$u(0.30)=0.524$, $u(0.35)=0.385$であるので、直線補間により

$$\alpha=\frac{0.30-0.35}{0.524-0.385}\times(0.5-0.385)+0.35=0.309$$

が得られる。

題意より

$$2\alpha^n=2\times(0.309)^n\leqq0.05$$

すなわち

$$(0.309)^n\leqq0.025$$

を満たす整数nを求めればよい。

$n=2$のとき $(0.309)^2=0.095>0.025$

$n=3$のとき $(0.309)^3=0.030>0.025$

$n=4$のとき $(0.309)^4=0.009<0.025$

であるので、求めるnは$n\geqq4$ である。

従って、標本の大きさnを４以上に定めたらよい。

３．標本 $X_1, \cdots, X_n$ は互いに独立で、かつ同一の正規分布に従うから、

$$Z = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$$

は自由度 $n-1$ のχ^2分布に従う。Ｚの確率密度関数は

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\Gamma((n-1)/2)} \left(\dfrac{z}{2}\right)^{(n-1)/2-1} e^{-z/2} & (z > 0) \\ 0 & (z \leqq 0) \end{cases}$$

であるから、

$$S = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{Z}$$

とおくと、Ｓの期待値Ｅ［Ｓ］は

$$\begin{aligned} E[S] &= E\left[\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{Z}\right] = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} E[\sqrt{Z}] \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \int_0^{\infty} \sqrt{z} \frac{1}{2\Gamma((n-1)/2)} \left(\frac{z}{2}\right)^{(n-1)/2-1} e^{-z/2} dz \\ &= \frac{\sqrt{2}\sigma}{2\sqrt{n}\Gamma((n-1)/2)} \int_0^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^{n/2-1} e^{-z/2} dz \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{2n}\Gamma((n-1)/2)} \int_0^{\infty} y^{n/2-1} e^{-y} 2dy \end{aligned}$$

$(y = z/2$ とおく$)$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sqrt{2/n}\ \sigma}{\Gamma((n-1)/2)} \int_0^{\infty} y^{n/2-1} e^{-y} dy \\ &= \frac{\sqrt{2/n}\ \sigma}{\Gamma((n-1)/2)} \Gamma(n/2) \end{aligned}$$

となる。これを変形することにより

$$E\left[\frac{\Gamma((n-1)/2)}{\Gamma(n/2)\sqrt{2/n}} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}\right] = \sigma$$

が得られ、不偏推定量であることが証明された。

４．正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$に関する

仮説H_0：$\mu = \mu_0 (=3)$，$\sigma^2 = \sigma_0^2 (=2.5)$

に対する尤度比λは

$$\lambda = \frac{\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_0} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_0^2}(x_i - \mu_0)^2\right)}{\max_{\mu, \sigma^2} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i - \mu)^2\right)}$$

である。$\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i - \mu)^2\right)$ は

$$\mu = \hat{\mu} = \bar{x}$$

$$\sigma^2 = \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

のとき最大となるので、λは

$$\lambda = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_0}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_0^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_0)^2\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\hat{\sigma}}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{2\hat{\sigma}^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \hat{\mu})^2\right)}$$

$$= \left(\frac{\hat{\sigma}}{\sigma_0}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_0^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_0)^2 + \frac{n}{2}\right)$$

と変形される。

$-2\log\lambda$ (底はｅ。以下同じ。)は、漸近的に自由度２のχ^2 分布に従うので、$-2\log\lambda$の値を求め、$\chi^2_2(0.005)$、$\chi^2_2(0.995)$との比較を行う。

$$-2\log\lambda = -2n\log\frac{\hat{\sigma}}{\sigma_0} + \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_0)^2 - n$$

$$= -n\log\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2} + \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_0)^2 - n$$

ところで、

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\frac{225}{100}=2.25,\quad \sigma_0{}^2=2.5$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2&=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+n(\bar{x}-\mu_0)^2\\&=225+100\times(2.7-3)^2\\&=234\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}-2\log\lambda&=-100\times\log\frac{2.25}{2.5}+\frac{1}{2.5}\times 234-100\\&=-100\times(-0.10536)+93.6-100\\&=4.136\end{aligned}$$

となり

$$\chi^2{}_2(0.995)=0.01<4.136<10.60=\chi^2{}_2(0.005)$$

が成り立つ。

従って、仮説H_0は棄却できない。

5．題意より、推移確率行列Mは

$$M=\begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}$$

と表せる。いま

$$a_j{}^{(n)}=P(X_n=j),\quad (j=1,2)$$

とおくと、

$$(a_1{}^{(n)},\ a_2{}^{(n)})=(\alpha,\beta)M^n=(\alpha,\beta)\begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}^n$$

ここで、Mの固有ベクトルを求める。Mの固有方程式

$$\begin{aligned}|M-\lambda E|&=\begin{vmatrix} p-\lambda & q \\ q & p-\lambda \end{vmatrix}\\&=(p-\lambda)^2-q^2\\&=(p-q-\lambda)(1-\lambda)=0\end{aligned}$$

より、Mの固有値$\lambda=1,\ p-q$ が得られる。

$\lambda=1$に対応する固有ベクトルの一つとして

$${}^t(1,\ 1)$$

が、また$\lambda=p-q$に対応する固有ベクトルの一つとして

$${}^t(1,\ -1)$$

が得られる。固有ベクトルから成る行列

$$T=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

とTの逆行列

$$T^{-1}=\begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/2 & -1/2\end{pmatrix}$$

により、行列Mは対角化され

$$T^{-1}MT=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & p-q\end{pmatrix}$$

となるので、

$$\begin{aligned}T^{-1}M^nT&=\overbrace{(T^{-1}MT)(T^{-1}MT)\cdots\cdots(T^{-1}MT)}^{n\text{個}}\\&=(T^{-1}MT)^n\\&=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & (p-q)^n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

が成り立つ。この関係式より

$$\begin{aligned}M^n&=T\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & (p-q)^n\end{pmatrix}T^{-1}\\&=\begin{pmatrix}1/2+(p-q)^n/2 & 1/2-(p-q)^n/2\\ 1/2-(p-q)^n/2 & 1/2+(p-q)^n/2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

が得られる。従って、

$$\begin{aligned}(a_1^{(n)},\ a_2^{(n)})&=(\alpha,\beta)M^n\\&={}^t\begin{pmatrix}1/2+(\alpha-\beta)(p-q)^n/2\\ 1/2-(\alpha-\beta)(p-q)^n/2\end{pmatrix}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{i})\end{aligned}$$

が成り立つ。

(1) 時点nでの絶対確率$P(X_n=j)$ $(j=1,2)$ は

$$P(X_n=j)=a_j^{(n)}$$

であるから、式(i)より

$$\left.\begin{aligned} P(X_n=1)&=1/2+(\alpha-\beta)(p-q)^n/2 \\ P(X_n=2)&=1/2-(\alpha-\beta)(p-q)^n/2 \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{ii})$$

となる。

(2) 式(ii)において、$p-q=2p-1$ で、$0<|p-q|<1$ であるから、$P(X_n=j)$ $(j=1,2)$ の極限分布 $\lim_{n\to\infty} P(X_n=j)$ は

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n=1)=1/2$$

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n=2)=1/2$$

となる。