数　学　Ⅰ　（問題）

1. 次の各問の $\boxed{}$ に入る答のみを，所定の解答用紙に記入せよ。（各問４点，計40点）

(1) 確率変数 X の密度関数が，

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \cdots\cdots x<1 \text{のとき} \\ \dfrac{c}{x^n} & \cdots\cdots x\geq 1 \text{のとき} \end{cases}$$

（c: 定数，n: 3 以上の自然数）

で与えられるとき，c および $E(X)$ を n を用いて表わすと，① $c=\boxed{}$ ，② $E(X)=\boxed{}$ である。

(2) 円弧上に固定された点Ａを端点とする任意の弦ＡＸが円に内接する正三角形の一辺よりも短くなる確率は $\boxed{}$ である。

(3) ６組の夫婦の中から３人の委員を選ぶとき，委員の中に夫婦がいない確率は $\boxed{}$ である。

(4) 確率変数 $X_i\ (i=1,2,3,4)$ が互いに独立で，正規分布 $N(\mu,2)$ にしたがうとき，$\dfrac{X_1+X_2+X_3-X_4}{2}$ の分散は $\boxed{}$ である。

(5) $P(A)=0.5,\ P(A\cup B)=0.6$ で

① A,B が排反であるとき，$P(B)=\boxed{}$

② A,B が独立であるとき，$P(B)=\boxed{}$

③ $P(A|B)=0.4$ のとき，　$P(B)=\boxed{}$

(6) $\phi(t)$ は平均 μ，分散 σ^2 の確率変数 X の積率母関数とする。ここで，$\psi(t)$ を $\psi(t)=\log\phi(t)$ で定義するとき，$\left.\dfrac{d^2}{dt^2}\psi(t)\right|_{t=0}$ を μ，σ^2 で表わせば $\left.\dfrac{d^2}{dt^2}\psi(t)\right|_{t=0}=\boxed{}$ である。ただし，$\phi(t)$ は $t=0$ の近傍で存在するものとする。

(7) 連続型確率変数 X の密度関数を $f(x)$ とするとき，確率変数 $Y=|X|$ の密度関数 $g(y)$ は，

$$g(y)=\begin{cases} 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ y<0 \text{ のとき} \\ \boxed{} & \cdots\cdots\ y\geq 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

(8) ２つの確率変数 X,Y は，$mX+nY=c$ を満足する。ここに，m, n, c は定数で，$m<0$, $n<0$ である。X と Y の相関係数は $\boxed{}$ である。

(9) さいころを３回振るとき，出る目の数の合計が６になる確率は $\boxed{}$ である。

(10) ポアッソン分布 $P(X=k)=e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$ （$k=0,1,2,\cdots$）の①平均は $\boxed{}$ ，②分散は $\boxed{}$ ，③積率母関数は $\boxed{}$ である。

2. 成功の確率がp ($0<p<1$)のベルヌーイ試行列を考える。第1回から連続した同一結果が切れると，つぎはそれまでと異なる結果が現われる。この新しい結果が連続して現われる回数を確率変数Xとするとき，$E(X)$, $V(X)$を求めよ。（20点）

$$SS\overset{X=1}{\overbrace{F}}S\cdots$$

$$SS\overset{X=2}{\overbrace{FF}}S\cdots$$

3. Xが正規分布$N(\mu, \sigma^2)$にしたがうとき，$a \leq X \leq b$の条件のもとでXの平均を，a, b, $F(x)$, $f(x)$を使って表わせ。ここに，$F(x)$, $f(x)$はそれぞれ$N(\mu, \sigma^2)$の分布関数および密度関数である。（20点）

4. $X_1, \cdots X_n$はすべて平均μと有限な分散σ^2を持つ独立条件のない確率変数列とする。$n\to\infty$のとき $\frac{1}{n^2}\sum_{i<j} Cov(X_i, X_j) \to 0$ であるならば，任意の$\varepsilon>0$に対して$n\to\infty$のとき$P\left\{\left|\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}-\mu\right|>\varepsilon\right\}\to 0$ が成立することをチェビシェフの不等式を用いて証明せよ。（20点）

数学Ⅰ （解答例）

1．

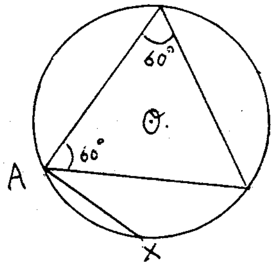
(1) $\int_1^\infty f(x)\ dx = 1$ だから

$\int_1^\infty c/x^n\ dx = [-c/(n-1)\cdot x^{1-n}]_1^\infty = c/(n-1) = 1 \quad \therefore\ c = n-1.$

また $EX = \int_1^\infty x\cdot c/x^n\ dx = [c/(2-n)\cdot x^{2-n}]_1^\infty$

$= c/(n-2) = (n-1)/(n-2).$

(2) 右図より求める確率は 2/3.



(3) 余事象は、委員が一組の夫婦と残り10人中一人という組合せだから、その場合の数は ${}_6C_1\cdot{}_{10}C_1$ 通り。また 委員の選び方は ${}_{12}C_3$ 通りあるから、求める確率は $1 - {}_6C_1\cdot{}_{10}C_1/{}_{12}C_3 = 8/11$ である。

(4) 各X_iが独立で$Var(X_i)=2$だから、

$$Var\{(X_1+X_2+X_3-X_4)/2\} = \{Var(X_1+X_2+X_3-X_4)\}/4$$
$$= \{Var(X_1)+Var(X_2)+Var(X_3)+Var(X_4)\}/4$$
$$= 2.$$

(5) $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$である。

① A,Bが排反なら $0.6 = 0.5 + P(B) - 0 \quad \therefore\ P(B)=0.1$.

② A,Bが独立なら $0.6 = 0.5 + P(B) -0.5\cdot P(B) \quad \therefore\ P(B)=0.2$.

③ $P(A|B)\cdot P(B) = P(A\cap B)$であるから、

$P(A|B)=0.4$なら $0.6 = 0.5 + P(B) -0.4\cdot P(B) \quad \therefore\ P(B)=1/6$.

(6) $\Psi'(t) = \phi'(t)/\phi(t)$

$\Psi''(t) = (\phi''(t)\phi(t)-\phi'(t)^2)/\phi(t)^2$

$\Psi''(0) = (\phi''(0)\phi(0)-\phi'(0)^2)/\phi(0)^2 = E(X^2)-(EX)^2 = \sigma^2$

($\because$ $\phi(0)=1$, $\phi'(0)=EX$, $\phi''(0)=E(X^2)$)

(7) Xの分布関数をF(x)とすると

$P\{|X|\leq y\} = P\{ -y\leq X\leq y \} = F(y)-F(-y)$ だから

$g(y) = (F(y)-F(-y))' = f(y)+f(-y)$. ($y\geq 0$ のとき)

(8) $Y = -m/n\cdot X+c$ だから $Y-EY = -m/n\cdot X+c - (-m/n\cdot EX+c)$

$= -m/n\cdot(X-EX)$

$\rho(X,Y) = E\{(X-EX)(Y-EY)\}/\{Var(X)Var(Y)\}^{1/2}$

$= E\{-m/n\cdot(X-EX)^2\}/\{Var(X)Var(-m/n\cdot X+c)\}^{1/2}$

$= -m/n\cdot Var(X)/[m^2/n^2\cdot\{Var(X)\}^2]^{1/2} = -1$.

(9) 出る目の和が6になる場合の数は、次の10通りである。

(1,1,4) (1,4,1) (4,1,1) (1,2,3) (1,3,2) (2,1,3) (2,3,1)

(3,1,2) (3,2,1) (2,2,2)

一方、全ての場合の数は6^3通りあり同様に確からしいと考えられる。

従って、求める確率は $10/6^3=5/108$ である。

ここに括弧標記は(1回目の結果,2回目の結果,3回目の結果)とした。

(10) ① Poisson分布の平均は λ

② Poisson分布の分散は λ

③ Poisson分布の積率母関数は $\sum_{k=0}^{\infty} \exp(\theta^k)\exp(-\lambda\cdot\lambda^k/k!)$

$= \exp(-\lambda)\cdot\sum_{k=0}^{\infty}[\lambda\exp\{\exp(\theta)\}]^k/k!$

$= \exp\{\lambda(\exp(\theta)-1)\}$

2. $\{X=k\}$という事象は、

『初めから何回か成功が続き失敗がk回繰返された後成功する』事象と、

『初めから何回か失敗が続き成功がk回繰返された後失敗する』事象

という二つの排反事象の和である。

従って $q=1-p$とすると、

$$P(X=k) = \sum_{j=1}^{\infty} p^j q^k p + \sum_{j=1}^{\infty} q^j p^k q = p^2 q^k \sum_{j=0}^{\infty} p^j + q^2 p^k \sum_{j=0}^{\infty} q^j$$

$$= p^2 q^k/(1-p) + q^2 p^k/(1-q) = p^2 q^{k-1} + q^2 p^{k-1}$$

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} k(p^2 q^{k-1} + q^2 p^{k-1}) = p^2 \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} + q^2 \sum_{k=1}^{\infty} kp^{k-1}$$

[$\{1/(1-q)\}$のﾏｸﾛｰﾘﾝ展開を微分、$\{1/(1-q)\}'=1/(1-q)^2$]

$$= p^2/(1-q)^2 + q^2/(1-p)^2 = 2 .$$

次に

$$Var(X) = E(X)^2 - (EX)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^2(p^2 q^{k-1} + q^2 p^{k-1}) - 4$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \{k(k-1)+k\}(p^2 q^{k-1} + q^2 p^{k-1}) - 4$$

$$= EX - 4 + p^2 q \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\cdot q^{k-2} + q^2 p \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\cdot p^{k-2}$$

[$\{1/(1-q)\}$のﾏｸﾛｰﾘﾝ展開を2回微分、$\{1/(1-q)\}''=2/(1-q)^3$]

$$= 2 - 4 + 2p^2 q/(1-q)^3 + 2q^2 p/(1-p)^3$$

$$= 2(q/p + p/q - 1)$$

$$= 2(3p^2 - 3p + 1)/\{p(1-p)\} .$$

3. $P\{X \leqq x \mid a \leqq X \leqq b\} = P\{a \leqq X \leqq x\}/P\{a \leqq X \leqq b\}$

$$= \{F(x) - F(a)\}/\{F(b) - F(a)\} \quad \cdots (a \leqq x \leqq b)$$

従って、$a \leqq X \leqq b$の条件のもとでXのもつ密度関数 $g(x|a \leqq x \leqq b)$は

$$g(x|a \leqq x \leqq b) = f(x)/\{F(b) - F(a)\}$$

である。

$$E(X \mid a \leqq X \leqq b) = \int_a^b x \cdot g(x \mid a \leqq x \leqq b)\,dx$$
$$= \{F(b) - F(a)\}^{-1} \cdot \int_a^b x f(x)\,dx \quad \cdots ①$$

ここで $f(x)$は $N(\mu, \sigma^2)$の密度関数だから、

$$\sigma^2 \cdot f'(x) = [\sigma/(2\pi)^{1/2} \cdot \exp\{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)\}]'$$
$$= -(x-\mu)/\{(2\pi)^{1/2} \cdot \sigma\} \cdot \exp\{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)\}$$
$$= \mu f(x) - x f(x)$$

の成り立つことが分る。従って、

$$① = \{F(b) - F(a)\}^{-1} \cdot \int_a^b \{\mu f(x) - \sigma^2 \cdot f'(x)\}dx$$
$$= \{F(b) - F(a)\}^{-1} \cdot [\mu F(x) - \sigma^2 \cdot f(x)]_a^b$$
$$= \mu - \sigma^2\{f(b) - f(a)\}/\{F(b) - F(a)\} .$$

4. $$\mathrm{Var}(X_1+\cdots+X_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) + 2\sum_{i<j} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$
$$= n\sigma^2 + 2\sum_{i<j} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

$$E\{(X_1+\cdots+X_n)/n\} = (EX_1+\cdots+EX_n)/n = \mu$$
$$\mathrm{Var}\{(X_1+\cdots+X_n)/n\} = \{\mathrm{Var}(X_1+\cdots+X_n)\}/n^2$$

ここで チェビシェフの不等式は、確率変数Xが平均m，分散$s^2<\infty$を持つとき任意の$k>0$に対し

$$P\{|X-m|>ks\} \leqq 1/k^2$$

が成り立つことを示す。$(X_1+\cdots+X_n)/n$ にチェビシェフの不等式を適用すれば

$$P\{\ |(X_1+\cdots+X_n)/n - \mu| > k \cdot \mathrm{Var}\{(X_1+\cdots+X_n)/n\}^{1/2}\ \} \leqq 1/k^2 \quad \cdots ①$$

が成立する。kは任意の正数だったから

$$\varepsilon = k \cdot \mathrm{Var}\{(X_1+\cdots+X_n)/n\}^{1/2}$$

とおくと、①式は任意の正数εを用いた式に変形されて

$$P\{\ |(X_1+\cdots+X_n)/n - \mu| > \varepsilon\ \} \leqq \mathrm{Var}\{(X_1+\cdots+X_n)/n\}/\varepsilon^2$$
$$= \{\sigma^2/n + 2/n^2 \sum_{i<j} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)\}/\varepsilon^2 \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty \text{のとき})$$

$\because$ $n \to \infty$のとき 仮定より $1/n^2 \sum_{i<j} \mathrm{Cov}(X_i, X_j) \to 0$ かつ

$\sigma^2<\infty$より $\sigma^2/n \to 0$