保険数学Ⅰ　（問題）

1. 次の(1)～(10)までについて，それぞれ五つの選択肢の中から，正しいものを一つ選んで，所定の解答用紙に，例えば(A)とか(D)のように記号で記入せよ。　(40点)

(1)　x才加入n年満期養老保険（保険金1，保険金年末払，保険料年払）をt年経過時に減額払済養老保険に変更するとき，変更後の保険金額に最も近い数値はどれか。

ただし，$d=0.052$，$\ddot{a}_{x:\overline{n|}}=15.1$，$\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}=12.4$ とし，付加保険料と解約控除は考えないものとする。

(A)　0.46　(B)　0.47　(C)　0.48　(D)　0.49　(E)　0.50

(2)　次の式のうち，正しいものはどれか。

(A)　$(Is)_{\overline{n|}}=\frac{1}{d}s_{\overline{n|}}-\frac{n}{i}$　(B)　$\frac{1}{a_{\overline{n|}}}-\frac{1}{s_{\overline{n|}}}=v$　(C)　$P_{\overline{n|}}=\frac{1}{1+a_{\overline{n-1|}}}+d$

(D)　$(Ia)_{\overline{n|}}=\frac{1}{d}a_{\overline{n|}}-\frac{nv^{n-1}}{i}$　(E)　$(Ia)_{\infty}=\frac{1}{i}+\frac{1}{i^3}$

(3)　$\mu_x=\frac{1}{100-x}$ のとき ${}_{10}p_{40}$ の値はどれか。

(A)　$\frac{3}{4}$　(B)　$\frac{4}{5}$　(C)　$\frac{5}{6}$　(D)　$\frac{6}{7}$　(E)　$\frac{7}{8}$

(4)　次の記述(Ⅰ)，(Ⅱ)の正否を判定せよ。

(Ⅰ)　$x\leqq y$ ならば $\mathring{e}_x\geqq\mathring{e}_y$

(Ⅱ)　$x\leqq y$ ならば $x+\mathring{e}_x\leqq y+\mathring{e}_y$

(A)　(Ⅰ)，(Ⅱ)とも正しい。

(B)　(Ⅰ)は正しいが(Ⅱ)は正しくない。

(C)　(Ⅰ)，(Ⅱ)とも正しくない。

(D)　(Ⅰ)は正しくないが，(Ⅱ)は正しい。

(E)　(Ⅱ)は正しくないが，死力μ_xが単調増加のときに限り(Ⅰ)は正しい。

(5)　死力が定数kのとき$\bar{A}_x$を表わす式は次のうちどれか。

(A)　$\frac{1}{k+\delta}$　(B)　$\frac{k}{k+\delta}$　(C)　$\frac{\delta}{k}$　(D)　$\frac{1}{k-\delta}$　(E)　$k+\delta$

(6)　${}_{n|}a_x$ を表わす式は次のうちどれか。

(A)　$\frac{(1+i)({}_nE_x-{}_{n|}A_x)}{i}$　(B)　$\frac{{}_nE_x-i\,{}_{n|}A_x}{i}$　(C)　$\frac{{}_nE_x-(1+i){}_{n|}A_x}{i}$

(D)　$\frac{(1+i){}_nE_x-{}_{n|}A_x}{i}$　(E)　$\frac{(1+i)({}_nE_x-i\,{}_{n|}A_x)}{i}$

(7)　終身保険（保険金年末払，保険料終身払，保険金1）の年払純保険料Pについて，$P_x=0.062217$，$P_{x+1}=0.066565$ とするとき，x才の生存率p_xの値に最も近いものは次のうちどれか。

ただし，$i=5.5\%$ とする。

(A)　0.955　(B)　0.960　(C)　0.965　(D)　0.970　(E)　0.975

(8)　$P_x=0.10$，　$A^{\ 1}_{x:\overline{1|}}=0.04$，　$p_x=0.95$ のとき ${}_1V_x$ の値に最も近いものは次のうちどれか。

(A)　0.071　(B)　0.079　(C)　0.087　(D)　0.091　(E)　0.098

(9) ${}_{15}P_{45}=0.038$, $P_{45:\overline{15}|}=0.056$, $A_{60}=0.625$ のとき, $P^{1}_{45:\overline{15}|}$ の値に最も近いのは次のうちどれか。

(A) 0.003　(B) 0.008　(C) 0.011　(D) 0.018　(E) 0.032

(10) 次の式のうちで ${}_np_{xy}$ を表わしているのはどれか。

(A) $1-{}_nq_{\overline{xy}}$　(B) ${}_np_x+{}_np_y-{}_np_{\overline{xy}}$　(C) ${}_nq_x\ {}_np_y$

(D) ${}_np_x+{}_np_y-1$　(E) ${}_nq_{\overline{xy}}+{}_np_x+{}_np_y$

2. 20年満期養老保険において，年払純保険料が2回目以降11回目まで，初年度の純保険料の5％ずつ逓減し，11回目以降は一定であるという。

(1) 初年度の年払純保険料を求めよ。

(2) 過去法と将来法によって第 t 年度末純保険料式責任準備金を求め，両者が一致することを証明せよ。

ただし，保険金＝1，死亡保険金は年末払とする。 (20点)

3. 死力 μ_x が単調増加するとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ。

(1) $\bar{a}_{x:\overline{n}|}\geqq\bar{a}'_{\overline{n}|}$

(2) $\left(\frac{1}{\bar{A}_{x:\overline{n}|}}\right)^{\frac{1}{n}}-1\geqq\frac{1}{n}\log\left(\frac{1}{1-\delta\bar{a}'_{\overline{n}|}}\right)$

ここに $\bar{a}'_{\overline{n}|}=\frac{1-e^{-n(\delta+\mu_{x+n})}}{\delta+\mu_{x+n}}$ とする。 (20点)

4. 生存確率が ${}_np_x$, ${}_np'_x$ なる2つの死亡表があり，その死力が

$$\mu_x=A+BC^x$$

$$\mu'_x=A'+B'C^x$$

である。

その場合，すべての x について ${}_{20}p_x={}_5p'_x$ のとき

A' 及び B' を A,B,C の式で表現せよ。

ここで，A,B,A',B',C は定数，C は2つの死亡表で同じ値とする。 (20点)

保険数学Ｉ　（解答例）

1.

問題番号	解答
(1)	(E)
(2)	(A)
(3)	(C)
(4)	(D)
(5)	(B)
(6)	(C)
(7)	(D)
(8)	(B)
(9)	(B)
(10)	(B)

2. (1) 11回目以降の純保険料をＰとすると

$$\frac{P}{D_x}\left(2D_x + 1.9D_{x+1} + \cdots + 1.1D_{x+9} + N_{x+10} - N_{x+20}\right) =$$

$$\frac{1}{D_x}\left(M_x - M_{x+20} + D_{x+20}\right)$$

$$\therefore\quad P = \frac{M_x - M_{x+20} + D_{x+20}}{\sum_{k=0}^{9}(2-0.1k)\,D_{x+k} + N_{x+10} - N_{x+20}}$$

ゆえに当初の純保険料は $\dfrac{2\times(M_x - M_{x+20} + D_{x+20})}{\sum_{k=0}^{9}(2-0.1k)\,D_{x+k} + N_{x+10} - N_{x+20}}$

(2) $t \leqq 10$のとき

過去法 $_tV_x = \dfrac{1}{D_{x+t}}\left\{\sum_{k=20}^{t-1}(2-0.1k)\,D_{x+k}\cdot P - (M_x - M_{x+t})\right\}$

将来法 $_tV_x = \left\{M_{x+t} - M_{x+20} + D_{x+20} - \sum_{k=t}^{9}(2-0.1k)\,D_{x+k}\,P\right.$

$$\left. - (N_{x+10} - N_{x+20})\,P\right\}\times\frac{1}{D_{x+t}}$$

$$= A_{x+t:\overline{20-t}|} - P\cdot\frac{1}{D_{x+t}}\times$$

$$\left\{\sum_{k=t}^{9}(2-0.1k)\,D_{x+n} + {}_{10-t|}\ddot{a}_{x+10:\overline{10}|}\right\}$$

過去法 $_tV_x = \dfrac{1}{D_{x+t}}\left\{\sum_{k=0}^{t-1}(2-0.1k)\ D_{x+k}\cdot P-(M_x-M_{x+t})\right\}$

ここで$\sum_{k=0}^{t-1}(2-0.1k)\ D_{x+k}\cdot P-M_x=-\sum_{k=t}^{9}(2-0.1k)\ D_{x+k}\cdot P$

$$-(N_{x+10}-N_{x+20})\ P-M_{x+20}+D_{x+20}$$

$$=\frac{1}{D_{x+t}}(M_{x+t}-M_{x+20}+D_{x+20})-\frac{1}{D_{x+t}}$$

$$\left\{\sum_{k=t}^{9}(2-0.1k)\ D_{x+k}\ P-(N_{x+10}-N_{x+20})\ P\right\}$$

$$=A_{x+t:\overline{20-t}|}-P\cdot\frac{1}{D_{x+t}}\left\{\sum_{k=t}^{9}(2-0.1k)\ D_{x+k}\right.$$

$$\left.+{}_{10-t|}\ddot{a}_{x+10:\overline{10}|}\right\}$$

=将来法 $_tV_x$

$t>10$のとき

同様にして計算できる。

3. (1) $0\leqq t\leqq n$で

$${}_tp_x=e^{-\int_0^t\mu_{x+\tau}d\tau}\geqq e^{-t\mu_{x+n}}$$

($\because\mu_x$ は単調増加で$\mu_{x+\tau}\leqq\mu_{x+n}$)

したがって

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|}=\int_0^n v^t\ {}_tp_x\ dt$$

$$\geqq\int_0^n v^t e^{-t\mu_{x+n}}dt$$

$$= \int_0^n e^{-(\delta + \mu_{x+n})} dt$$

$$= \frac{1 - e^{-n(\delta + \mu_{x+n})}}{\delta + \mu_{x+n}}$$

$$= \bar{a}'_{\overline{n|}}$$

$$\therefore \quad \bar{a}_{x:\overline{n|}} \geqq \bar{a}'_{\overline{n|}}$$

(2) $\bar{A}_{x:n} = 1 - \delta \bar{a}_{x:n}$ より,

$$\left(\frac{1}{\bar{A}_{x:\overline{n|}}} \right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{1 - \delta \bar{a}_{x:\overline{n|}}} \right)^{\frac{1}{n}} > 0$$

今, 一般に $v > 0$ ならば $v - 1 \geqq \log v$ が成り立つので

$$\left(\frac{1}{\bar{A}_{x:\overline{n|}}} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \geqq \log \left(\frac{1}{\bar{A}_{x:\overline{n|}}} \right)^{\frac{1}{n}}$$

$$= \log \left(\frac{1}{1 - \delta \bar{a}_{x:\overline{n|}}} \right)^{\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{1}{n} \log \left(\frac{1}{1 - \delta \bar{a}_{x:\overline{n|}}} \right)$$

$$\geqq \frac{1}{n} \log \left(\frac{1}{1 - \delta \bar{\alpha}_{\overline{n|}}} \right)$$

$$\left(\begin{array}{l} \because \quad \bar{a}_{x:\overline{n|}} \geqq \alpha_{\overline{n|}} \text{ と } 1 - \delta \bar{a}_{x:\overline{n|}} > 0 \text{ から} \\ \qquad \dfrac{1}{1 - \delta \bar{a}_{x:\overline{n|}}} \geqq \dfrac{1}{1 - \delta \alpha_{\overline{n|}}} > 0 \text{ が成り立つ} \end{array} \right)$$

4. $\mu_x = A + BC^x$ より $\ell_x = k s^x g^{c^x}$

ここで $\log S = -A$

$\log g = -B/(\log C)$

同様にして

$\mu'_x = A' + B'C^x$ より $\ell'_x = k' s'^x g'^{c^x}$

ここで $\log S' = -A'$

$\log g' = -B'/(\log C)$

${}_{20}p_x = {}_5p'_x$ より

$${}_{20}p_x = \frac{\ell_{x+20}}{\ell_x} = \frac{S^{x+20} g^{c^{x+20}}}{S^x g^{c^x}} = S^{20} g^{c^x(c^{20}-1)}$$

$${}_5p'_x = \frac{\ell_{x+5}}{\ell_x} = \frac{S'^{x+5} g'^{c^{x+20}}}{S'^x g'^{c^x}} = S'^5 g'^{c^x(c^5-1)}$$

$\therefore\ S^{20} = S'^5$ ………………………………… (イ)

$g^{c^x(c^{20}-1)} = g'^{c^x(c^5-1)}$ …………… (ロ)

(イ) より $20\log S = 5\log S'$

$\therefore\ -20A = -5A'$ $\therefore\ A' = 4A$

(ロ) より $C^x(C^{20}-1)\log g = C^x(C^5-1)\log g'$

$$\therefore\ \frac{-C^x(C^{20}-1)\times B}{\log C} = \frac{-C^x(C^5-1)\times B'}{\log C}$$

$$\therefore\ B' = \frac{C^{20}-1}{C^5-1}\times B$$