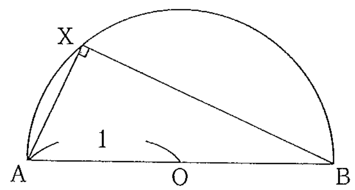
昭和60年度（問　題）

1. 半径１の半円の弧$\widehat{AB}$上に，無作為に一点Ｘをとる。Ｘは弧$\widehat{AB}$上で一様に分布するとき，線分ＡＸと線分ＢＸの長さの和の期待値を
求めよ。



2. 正の値をとる確率変数Ｘ，Ｙ，Ｚに対して，確率Ａ，Ｂ，Ｃをつぎのとおり定義する($a>0$)。

$$A=P(X+Y+Z>a)$$
$$B=P(X>\frac{a}{3})+P(Y>\frac{a}{3})+P(Z>\frac{a}{3})$$
$$C=1-P(X\leqq a,\ Y\leqq a,\ Z\leqq a)$$

このとき，

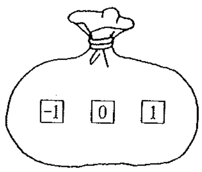
$$C\leqq A\leqq B$$

を証明せよ。

3. －１，０，１の数字１個を書いた３枚のカードの入った袋から復元抽出でカードを１枚ずつ抽出する。i番目に抽出したカードの数字をX_i（$i=1, 2, 3$）とするとき，つぎの問に答えよ。

(1) $T_1=min(X_1, X_2, X_3)$，$T_2=X_1X_2X_3$の平均と分散を求めよ。

(2) T_1とT_2の相関係数を求めよ。



4. Ｘ，Ｙ，Ｚを互いに独立な確率変数とし，それぞれの密度関数を

$$f_1(x)=\begin{cases}1 & (0\leqq x\leqq 1)\\ 0 & (その他)\end{cases}\quad (一様分布)$$

$$f_2(y)=\begin{cases}e^{-y} & (0\leqq y<\infty)\\ 0 & (その他)\end{cases}\quad (指数分布)$$

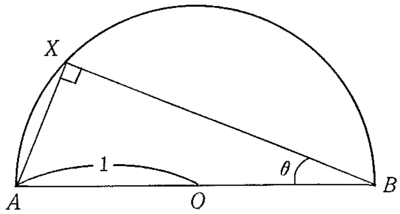
$$f_3(z)=\begin{cases}\frac{1}{4}z\,e^{-\frac{z}{2}} & (0\leqq z<\infty)\\ 0 & (その他)\end{cases}\quad (\chi^2分布(自由度4))$$

とするとき，Ｗ＝Ｘ＋Ｙ＋Ｚの密度関数を求めよ。

5. 平均１のポアソン分布および中心極限定理を用いて次の漸近式を証明せよ。ただし，n は十分大きな正の整数とする。

$$1 + n + \frac{n^2}{2!} + \cdots\cdots + \frac{n^n}{n!} \fallingdotseq \frac{1}{2}e^n$$

昭和60年度　（解答例）



1. 今 $\angle ABX=\theta$ とおくと，Xが半円の弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上をAからB迄動くとき，θは0から $\frac{\pi}{2}$ 迄変化する。

　又線分 AXと線分 BXの長さを示す確率変数をそれぞれ $AX(\theta)$，$BX(\theta)$ で表わすと，

$$AX(\theta)=2\sin\theta$$

$$BX(\theta)=2\cos\theta$$

である。

　Xは弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上で一様に分布するから $AX(\theta)$，$BX(\theta)$ の確率密度関数は $[0,\ \frac{\pi}{2}]$ 上で $\frac{2}{\pi}$ である。

　従って求める期待値は次の通り求められる。

$$E(AX+BX)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2(\sin\theta+\cos\theta)\cdot\frac{2}{\pi}\ d\theta$$

$$=\frac{4}{\pi}\left[-\cos\theta+\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{8}{\pi}$$

2. 確率変数 X，Y，Z の値をそれぞれ x，y，z で表わし，$(x,\ y,\ z)$ を要素とする集合を次の通り定義する。

$$H_1\equiv\{(x,\ y,\ z)|(x>a)\cup(y>a)\cup(z>a)\}$$

$$H_2\equiv\{(x,\ y,\ z)|\ x+y+z>a\}$$

$$H_3=\left\{(x,\ y,\ z)\middle|\left(x>\frac{a}{3}\right)\cup\left(y>\frac{a}{3}\right)\cup\left(z>\frac{a}{3}\right)\right\}$$

明らかに $H_1\subset H_2\subset H_3$ である。

又，一般に集合 H_4，H_5 を考えたとき $P(H_4\cup H_5)\leqq P(H_4)+P(H_5)$ であるから

$$B=P\left(X>\frac{a}{3}\right)+P\left(Y>\frac{a}{3}\right)+P\left(Z>\frac{a}{3}\right)$$

$$\geqq P(H_3)\geqq P(H_2)=P(X+Y+Z>a)=A$$

$\therefore\ \underline{B\geqq A}$

次に

$$\begin{aligned}A=P(X+Y+Z>a)&=P(H_2)\\&\geqq P(H_1)\\&=1-P(H_1{}^{\mathrm{C}})\quad(\text{ここに } H_1{}^{\mathrm{C}} \text{ は } H_1 \text{ の補集合})\\&=1-P[\{(X>a)\cup(Y>a)\cup(Z>a)\}^{\mathrm{C}}]\\&=1-P(X\leqq a\cap Y\leqq a\cap Z\leqq a)\\&=C\end{aligned}$$

$\therefore\ \underline{C\leqq A}$

従って $\underline{C\leqq A\leqq B}$

3. (1) X_1, X_2, X_3 は $\{-1,\ 0,\ 1\}$ の重複順列であるからその個数は $3^3=27$通りある。そして，どの順列も均等に起こると考えて良いから，等確率 $1/27$ で生起する。

27通りを全て書き出し，$\{-1,\ 0,\ 1\}$ の組合せとして分類し T_1, T_2 の値を調べれば，次の分布表を得ることができる。

組　合　せ	順列数	確率	T_1	T_2	T_1T_2
(−1, −1, −1)	1	1/27	−1	−1	1
(−1, −1, 0)	3	3/27	−1	0	0
(−1, −1, 1)	3	3/27	−1	1	−1
(−1, 0, 0)	3	3/27	−1	0	0
(−1, 0, 1)	6	6/27	−1	0	0
(−1, 1, 1)	3	3/27	−1	−1	1
(0, 0, 0)	1	1/27	0	0	0
(0, 0, 1)	3	3/27	0	0	0
(0, 1, 1)	3	3/27	0	0	0
(1, 1, 1)	1	1/27	1	1	1

ここに

$T_1 =$

$\min(X_1, X_2, X_3)$

$T_2 = X_1\ X_2\ X_3$

である。

上表からT_1，T_2 の分布をまとめると下表のようになる。

T_1（値）	−1	0	1
生起確率	19/27	7/27	1/27

T_2（値）	−1	0	1
生起確率	4/27	19/27	4/27

$$\therefore\quad E(T_1) = (-1)\times\frac{19}{27} + 0\times\frac{7}{27} + 1\times\frac{1}{27} = \underline{-\frac{2}{3}}$$

$$E(T_2) = (-1)\times\frac{4}{27} + 0\times\frac{19}{27} + 1\times\frac{4}{27} = \underline{0}$$

$$Var(T_1) = (-1)^2\times\frac{19}{27} +{}^{2}0^2\times\frac{7}{27} + 1^2\times\frac{1}{27} - E(T_1)^2 = \frac{20}{27} - \frac{12}{27} = \underline{\frac{8}{27}}$$

$$Var(T_2) = (-1)^2\times\frac{4}{27} + 0^2\times\frac{19}{27} + 1^2\times\frac{4}{27} - E(T_2)^2 = \frac{8}{27} - 0 = \underline{\frac{8}{27}}$$

(2)　T_1T_2 の分布表は次の通り

T_1T_2（値）	−1	0	1
生起確率	3/27	19/27	5/27

$$Cov\,(T_1,T_2)=E\,(T_1T_2)-E\,(T_1)\cdot E\,(T_2)$$

$$=(-1)\times\frac{3}{27}+0\times\frac{19}{27}+1\times\frac{5}{27}-\left(-\frac{2}{3}\right)\times 0=\frac{2}{27}$$

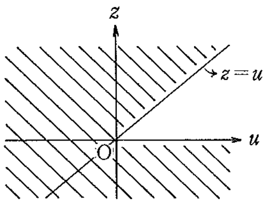
$$\therefore\quad T_1 \text{と} T_2 \text{の相関係数}=\frac{Cov(T_1,T_2)}{\sqrt{Var(T_1)}\cdot\sqrt{Var(T_2)}}=\frac{2/27}{8/27}=\underline{\frac{1}{4}}$$

4. $Y+Z$ の確率密度関数を $g(u)$ とおくと，Y と Z は独立であるから

$$g(u)=\int_{-\infty}^{\infty}f_2(u-z)\cdot f_3(z)\,dz$$

と書ける。ここで　$-\infty<z<0$ のとき　$f_3(z)=0$

又　$z>u$ のとき　$f_2(u-z)=0$ だから



左図座標(u,z)上の斜線部で $g(u)=0$ である。

即ち，(i)　$u<0$ のとき　$g(u)=0$

(ii)　$u\geqq 0$ のとき　$g(u)=\int_0^u f_2(u-z)\,f_3(z)\,dz$

$$=\int_0^u e^{-(u-z)}\cdot\frac{1}{4}ze^{-\frac{z}{2}}\,dz$$

$$=\frac{e^{-u}}{4}\cdot\int_0^u ze^{\frac{z}{2}}\,dz$$

$$=\frac{e^{-u}}{4}\cdot\left[\,2ze^{\frac{z}{2}}-4e^{\frac{z}{2}}\,\right]_0^u$$

$$=\frac{e^{-u}}{4}\cdot\left(2ue^{\frac{u}{2}}-4e^{\frac{u}{2}}+4\right)$$

$$=\frac{1}{2}ue^{-\frac{u}{2}}-e^{-\frac{u}{2}}+e^{-u}$$

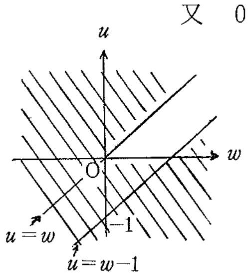
次に$X+Y+Z$の確率密度関数を$h(w)$とおくとX，Y，Zは互いに独立であるから

$$h(w)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(w-u)\cdot g(u)\,du$$

と書ける。ここで　$u<0$　のとき　$g(u)=0$

又　$0>w-u$　及び　$w-u>1$のとき　$f_1(w-u)=0$だから

左図座標(w,u)上の斜線部で$h(w)=0$である。



即ち，(iii)　$w<0$のとき　$\underline{h(w)=0}$

(iv)　$0\leqq w\leqq 1$のとき

$$h(w)=\int_0^w f_1(w-u)\cdot g(u)\,du$$

$$=\int_0^w\left(\frac{1}{2}ue^{-\frac{u}{2}}-e^{-\frac{u}{2}}+e^{-u}\right)du$$

$$=\left[2e^{-\frac{u}{2}}-ue^{-\frac{u}{2}}+2e^{-\frac{u}{2}}-e^{-u}\right]_0^w$$

$$=\underline{1-we^{-\frac{w}{2}}-e^{-w}}$$

(v)　$w>1$のとき

$$h(w)=\int_{w-1}^{w}f_1(w-u)\cdot g(u)\,du$$

$$=\int_{w-1}^{w}\left(\frac{1}{2}ue^{-\frac{u}{2}}-e^{-\frac{u}{2}}+e^{-u}\right)du$$

$$= \left[-ue^{-\frac{u}{2}} - e^{-u} \right]_{w-1}^{w}$$

$$= \underline{-we^{-\frac{w}{2}} - e^{-w} + (w-1)e^{-\frac{w-1}{2}} + e^{-(w-1)}}$$

(iii), (iv), (v)より求める密度関数が示された。

5.　証明する漸近式に辺々 e^{-n} を乗ずると,

$$e^{-n} \cdot \left(1 + \frac{n}{1!} + \frac{n}{2!} + \cdots\cdots + \frac{n^n}{n!}\right) \fallingdotseq \frac{1}{2} \qquad ①$$

となり，左辺は平均 n のポアソン分布の分布関数の形をしていることが分る。

そこで，X_i ($i=1$, ……, n) として平均が1でおのおの独立なポアソン分布の確率変数列を考えよう。

このとき $X_1 + X_2 + \cdots\cdots + X_n$ は平均 n のポアソン分布に従うことが知られているから

$$P(X_1 + \cdots\cdots + X_n \leqq n) = \sum_{k=0}^{n} e^{-n} \cdot \frac{n^k}{k!}$$

$$= e^{-n} \cdot \left(1 + \frac{n}{1!} + \frac{n^2}{2!} + \cdots\cdots + \frac{n^n}{n!}\right) \qquad ②$$

一方，$E(X_i) = 1$，$Var(X_i) = 1$ であるから中心極限定理により n が十分大きいとき

$$P\left(\frac{X_1 + \cdots\cdots + X_n - n}{\sqrt{n}} \leqq x\right) \fallingdotseq \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \qquad ③$$

が成立する。①，②，③を比較し，③で $x=0$ とおくと,

$$P(X_1 + \cdots\cdots + X_n - n \leqq 0) \fallingdotseq \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$\therefore \quad P(X_1 + \cdots\cdots + X_n \leqq n) \fallingdotseq \frac{1}{2} \qquad ④$$

②と④より n が十分大きな正の整数のとき①の漸近式が成立する。

従って，証明された。