昭和59年度（問　題）

1. X_1，X_2，…………，X_n は独立に同じ分布（平均 μ，分散 $\sigma^2 < +\infty$）に従う確率変数列とする。
$Y_i = X_1 + X_2 + \cdots\cdots + X_i$（$i = 1, 2, \cdots\cdots, n$）とおくとき，$Y_{n-1}$ と Y_n の相関係数を求めよ。

2. コインを5回投げ，表が出た回数だけサイコロを振るものとする。サイコロで出た目の数の和の平均と分散を求めよ。

3. X，Yが独立に同じ正規分布（平均0，分散1）に従う。
(1) X＋Yの分布を求めよ。
(2) X－YとX＋Yは独立であることを示せ。

4. ある保険会社の1年定期保険の被保険者群団の死亡（事故）率別，保険金額別構成は次のとおりとなっている。

		保険金額の区分	
		保険金＝1,000 万円	保険金＝2,000 万円
死亡率の区分	死亡率＝0.02	500 人	500 人
	死亡率＝0.10	300 人	500 人

被保険者 i に対するこの1年定期保険の純保険料 P_i を次の式で定める。

$$P_i = (1+\theta)\,E(X_i)$$

ここに，X_i ：被保険者 i に対する支払保険金額

θ ：正の定数

この被保険者群団において死差損（損失）の発生する確率を5％以内に止めるためには θ をいくら以上に設定すればよいか。

中心極限定理を用いて計算せよ。

ここに，$\displaystyle\int_0^{1.645} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 0.45$ とする。

5. 3人がじゃんけんで，1, 2, 3番を決めるものとするとき，次の問に答えよ。ただし，石，紙，鋏を出す確率は3人とも$\frac{1}{3}$とする。
(1) 第1回のじゃんけんで，1番なり3番なりが決まる確率を求めよ。
(2) 2人が残った場合，次の回に勝負がつく確率を求めよ。
(3) r回目（r ≧ 2）で1, 2, 3番が決まる確率を求めよ。

昭和59年度（解答例）

1. $X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n$ は独立だから，

$E(Yi) = i\mu, Var(Yi) = i\sigma^2 \quad (i = 1, 2, \cdots\cdots, n)$

よって，

$$Cov(Y_{n-1}, Y_n) = E(Y_{n-1} Y_n) - E(Y_{n-1})E(Y_n)$$

$$= E(Y_{n-1}^2 + Y_{n-1} \cdot X_n) - n(n-1)\mu^2$$

$$= E(Y_{n-1}^2) + E(Y_{n-1})E(X_n) - n(n-1)\mu^2$$

$$= Var(Y_{n-1}) + \{E(Y_{n-1})\}^2 + (n-1)\mu^2 - n(n-1)\mu^2$$

$$= (n-1)\sigma^2 + (n-1)^2\mu^2 + (n-1)\mu^2 - n(n-1)\mu^2$$

$$= (n-1)\sigma^2$$

故に，Y_{n-1} と Y_n の相関係数を $R(Y_{n-1}, Y_n)$とすると，

$$R(Y_{n-1}, Y_n) = \frac{Cov(Y_{n-1}, Y_n)}{\sqrt{Var(Y_{n-1})Var(Y_n)}}$$

$$= \frac{(n-1)\sigma^2}{\sqrt{(n-1)\sigma^2 \cdot n\sigma^2}}$$

$$= \underline{\sqrt{\frac{n-1}{n}}}$$

2. i回目のコイン投げによって得るサイコロの目の数（コイン投げで裏が出た場合は０）を確率変数Xi（$i = 1, 2, 3, 4, 5$）とすると，

$$\begin{cases} P(Xi=0)=\dfrac{1}{2} \\ \\ P(Xi=k)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{12} \end{cases}$$ （$k=1, 2, \cdots\cdots, 6$） だから，

$$E(Xi)=\sum_{k=1}^{6}\frac{k}{12}=\frac{1}{12}\times\frac{6\times7}{2}=\frac{7}{4}$$

$$Var(Xi)=E(Xi^2)-\{E(Xi)\}^2$$

$$=\sum_{k=1}^{6}\frac{k^2}{12}-\left(\frac{7}{4}\right)^2$$

$$=\frac{1}{12}\times\frac{6\times7\times13}{6}-\left(\frac{7}{4}\right)^2=\frac{217}{48}$$

よって，サイコロで出た目の数の和を確率変数Sとすると，

$$E(S)=E\left(\sum_{i=1}^{5}Xi\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{5}E(Xi)$$

$$=5\times\frac{7}{4}=\underline{\frac{35}{4}}$$

$$Var(S)=Var\left(\sum_{i=1}^{5}Xi\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{5}Var(Xi)$$

$$=5\times\frac{217}{48}=\underline{\frac{1085}{48}}$$

（別解）

表の出る回数を確率変数N，サイコロで出た目の数の和を確率変数Sとすると，

$$E(N)=5\times\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

$$Var(N)=5\times\left\{\frac{1}{2}\times 1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}=\frac{5}{4}$$

$$E(S|N)=\frac{1}{6}\left(\sum_{i=1}^{6} i\right)N$$

$$=\frac{7}{2}N$$

$$Var(S|N)=\left\{\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} i^2-\left(\frac{7}{2}\right)^2\right\}N$$

$$=\frac{35}{12}N$$

よって，

$$E(S)=E(E(S|N))$$

$$=E\left(\frac{7}{2}N\right)$$

$$=\frac{7}{2}E(N)$$

$$=\frac{7}{2}\times\frac{5}{2}=\frac{35}{4}$$

$$Var(S) = Var(E(S|N)) + E(Var(S|N))$$

$$= Var\left(\frac{7}{2}N\right) + E\left(\frac{35}{12}N\right)$$

$$= \left(\frac{7}{2}\right)^2 Var(N) + \frac{35}{12}E(N)$$

$$= \frac{49}{4} \times \frac{5}{4} + \frac{35}{12} \times \frac{5}{2} = \underline{\frac{1085}{48}}$$

3. (1) X, Y の密度関数を $f(x)$, $g(y)$ とすると,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

X と Y は独立なので, $X+Y$ の密度関数 $h_1(u)$ は,

$$h_1(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, g(u-x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(u-x)^2}{2}}\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+(u-x)^2}{2}}\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left\{\left(x-\frac{u}{2}\right)^2 + \frac{u^2}{4}\right\}}\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{u^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x-\frac{u}{2}\right)^2}\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{u^2}{4}} \cdot \sqrt{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{u^2}{4}}$$

これは平均0，分散2の正規分布の密度関数である。

よって，$X+Y$ は $N(0, 2)$ に従う。

(2) (1)と同様に $X-Y$ の密度関数 $h_2(v)$ を求めると

$$h_2(v) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{v^2}{4}}$$

一方,$X-Y=U, X+Y=V$ とし，$(X, Y), (U, V)$ の密度関数を $h(x, y)$, $h'(u, v)$ とすると，

$$h'(u, v) = h(x, y)\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|$$

$$= \frac{1}{2} h(x, y)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

$$= \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u+v}{2}\right)^2} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u-v}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{u^2+v^2}{4}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{u^2}{4}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{v^2}{4}}$$

$$= h_1(u) \cdot h_2(v)$$

よって，$X+Y$ と $X-Y$ は独立である。

（別解）

(1)　X, Y は $N(0, 1)$ に従うから，それぞれの積率母関数 $M_X(t), M_Y(t)$ は，

$$M_X(t) = M_Y(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$$

X と Y は独立だから $X+Y$ の積率母関数は，

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t) \cdot M_Y(t)$$

$$= e^{\frac{t^2}{2}} \cdot e^{\frac{t^2}{2}}$$

$$= e^{t^2}$$

これは $N(0, 2)$ の積率母関数である。

よって，$X+Y$ は $N(0, 2)$ に従う。

(2)　(1)と同様に，$X-Y$ の積率母関数を求めると

$$M_{X-Y}(t) = e^{t^2}$$

一方，$(X+Y, X-Y)$ の積率母関数は

$$M_{(X+Y,\, X-Y)}(t_1, t_2) = E(e^{t_1(X+Y)+t_2(X-Y)})$$

$$= E(e^{(t_1+t_2)X+(t_1-t_2)Y})$$

$$= E(e^{(t_1+t_2)X}) \cdot E(e^{(t_1-t_2)Y}) \quad (\because\ X \text{ と } Y \text{ は独立})$$

$$= e^{\frac{(t_1+t_2)^2}{2}} \cdot e^{\frac{(t_1-t_2)^2}{2}}$$

$$= e^{t_1^2 + t_2^2}$$

$$= e^{t_1^2} \cdot e^{t_2^2}$$

$$= M_{X+Y}(t_1) \cdot M_{X-Y}(t_2)$$

よって，$X+Y$ と $X-Y$ は独立である。

4. $S = \sum_{i=1}^{1800} Xi$ とすると，$Xi(i = 1, 2, \cdots\cdots, 1800)$ は互いに独立と考えられるから，

$$E(S) = E(\sum_{i=1}^{1800} Xi)$$

$$= \sum_{i=1}^{1800} E(Xi)$$

$$= 0.02 \times 10^7 \times 500 + 0.02 \times 2 \times 10^7 \times 500$$

$$+ 0.10 \times 10^7 \times 300 + 0.10 \times 2 \times 10^7 \times 500$$

$$= 160 \times 10^7$$

$$Var(S) = Var(\sum_{i=1}^{1800} Xi)$$

$$= \sum_{i=1}^{1800} Var(Xi)$$

$$= (10^7)^2 \times 0.02 \times (1-0.02) \times 500 + (2 \times 10^7)^2 \times 0.02 \times (1-0.02) \times 500$$

$$+ (10^7)^2 \times 0.10 \times (1-0.10) \times 300 + (2 \times 10^7)^2 \times 0.10 \times (1-0.10) \times 500$$

$$= 256 \times 10^{14}$$

題意より，$Pr(S \leq (1+\theta)E(S)) = 0.95$ を満たす最小の θ を求ればよい。

式を変形すると，$Pr\left(\dfrac{S-E(S)}{\sqrt{Var(S)}} \leq \dfrac{\theta E(S)}{\sqrt{Var(S)}} \right) = 0.95$

中心極限定理により $\dfrac{S-E(S)}{\sqrt{Var(S)}}$ の分布は $N(0, 1)$ に近いと見なせる。

$\displaystyle\int_{-\infty}^{1.645} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 0.95$ だから，

$\dfrac{\theta E(S)}{\sqrt{Var(S)}} = 1.645$ を満たす θ を求めればよい。

よって，$\theta = 1.645 \times \dfrac{\sqrt{Var(S)}}{E(S)}$

$$= 1.645 \times \frac{\sqrt{256 \times 10^{14}}}{160 \times 10^{7}}$$

$$= \underline{0.1645}$$

5. (1) 場合の数は全部で $3^3 = 27$ 通りある。

第1回のじゃんけんで，1番なり3番なりが決まる事象を E とすると，E^c は，3人とも異なった手を出した場合（$3! = 6$ 通り）かあるいは3人とも同じ手を出した場合（3通り）であるから，計9通りある。

よって，$P(E) = 1 - P(E^c)$

$$= 1 - \frac{9}{27} = \underline{\frac{2}{3}}$$

(2) 2人だけのじゃんけんで出される手の場合の数は $3^2 = 9$ 通りある。

その際勝負がつくという事象を F とすれば，F^c は2人とも同じ手を出す場合（3通り）である。

よって，$P(F)=1-P(F^c)$

$$=1-\frac{3}{9}\quad=\underline{\frac{2}{3}}$$

(3)　r 回目で 1, 2, 3 番が決まるということは，$l(l<r)$ 回目で 1 番なり 3 番が決まり，$(l+1)$ 回目以降残った 2 人でじゃんけんを続け r 回目に始めて 2 人の間で勝負がつくということであるから，その確率 P は

$$P=\sum_{l=1}^{r-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{l-1}\times\left(\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{1}{3}\right)^{r-1-l}\times\frac{2}{3}$$

$$=4\sum_{l=1}^{r-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{r}$$

$$=\underline{\frac{4(r-1)}{3^r}}$$