昭和58年度（問　題）

1. 死亡表 $\{q_x\}$，$\{q'_x\}$の間に，任意のxについて，$p'_x=(1+r)\ p_x$ の関係が成り立ち，〔$\{q'_x\}$, i〕による$\ddot{a}_x$が〔$\{q_x\}$, i'〕による$\ddot{a}'_x$と任意のxについて等しいとき，iとi'の間にどのような関係があるか。

2 $x \leq y < x+m$において，$q'_y = q_y + \dfrac{k}{v\ddot{a}_{y+1}}$ が成り立つとき，$0 \leq t \leq m$において，${}_tV'_x = {}_tV_x$ となることを証明せよ。

ここに，$k = \dfrac{\ddot{a}_{x+m}}{\ddot{a}'_{x+m}} - 1$ とする。

3. 保険金即時払の終身保険の連続払保険料による純保険料式責任準備金 ${}_t\bar{V}(\bar{A}_x)$ は，経過tに関して単調増加することを示せ。ただし，死力μ_xは単調増加するものとする。

4. ある定常人口の社会で，現在30歳以上の人の平均年齢が50歳であるとき，これらの人の死亡時年齢の平均を求めよ。

5. 死因(i)および(j)から成る二重脱退残存表において，各死因による死亡が各年齢において一様に分布するとき，死因(i)による絶対死亡率 $\bar{q}_x^{(i)} = 1 - e^{-\int_0^1 \mu_{x+t}^{(i)} dt}$ は近似的に次式で与えられることを示せ。

$$\bar{q}_x^{(i)} \fallingdotseq \frac{q_x^{(i)}}{1-\frac{1}{2}q_x^{(j)}}$$

ここに，$q_x^{(k)} = \dfrac{d_x^{(k)}}{l_x}$ $(k=i,\ j)$ とする。

昭和58年度（解答例）

1. $v=\dfrac{1}{1+i}$, $v'=\dfrac{1}{1+i'}$ とおく。

$$
\begin{aligned}
{}_tp'_x &= p'_x\cdot p'_{x+1}\cdot p'_{x+2}\cdot\cdots\cdots\cdot p'_{x+t-1}\\
&= (1+r)p_x\cdot(1+r)p_{x+1}\cdot(1+r)p_{x+2}\cdot\cdots\cdots\cdot(1+r)p_{x+t-1}\\
&= (1+r)^t\,{}_tp_x
\end{aligned}
$$

であるから

$$\ddot{a}_x=\sum_{t=0}^{\infty}v^t\,{}_tp'_x$$

$$=\sum_{t=0}^{\infty}v^t(1+r)^t\,{}_tp_x$$

となる。一方,

$$\ddot{a}'_x=\sum_{t=0}^{\infty}(v')^t\,{}_tp_x$$

であり，題意により，任意の x について $\ddot{a}_x=\ddot{a}'_x$ であるから，任意の x について

$$\sum_{t=0}^{\infty}\{v(1+r)\}^t\,{}_tp_x=\sum_{t=0}^{\infty}(v')^t\,{}_tp_x \qquad \cdots\cdots①$$

が成り立つ。

ここで，$x=\omega-2$ とすると

$${}_0p_{\omega-2}+v(1+r)\,{}_1p_{\omega-2}={}_0p_{\omega-2}+v'\,{}_1p_{\omega-2}$$

$$\therefore\quad v(1+r)\,{}_1p_{\omega-2}=v'\,{}_1p_{\omega-2}$$

$$\therefore\quad v(1+r)=v'$$

となる。また，この v' が任意の x につき①を満たすことは明らかである。

よって,

$$\frac{1+r}{1+i}=\frac{1}{1+i'}$$

から,

$$i'=\frac{i-r}{1+r}$$

2. 数学的帰納法により証明する。

$x < u \leqq x+m$ なる u において $\ddot{a}_u = (1+k)\ddot{a}'_u$ が成り立つと仮定すると,

$$\ddot{a}_{u-1} = 1 + vp_{u-1}\ddot{a}_u$$

$$= 1 + v\left(p'_{u-1} + \frac{k}{v\ddot{a}_u}\right)\left(1+k\right)\ddot{a}'_u \quad \left(\because \quad \begin{aligned} p'_y &= 1 - q'_y = 1 - q_y - \frac{k}{v\ddot{a}_{y+1}} \\ &= p_y - \frac{k}{v\ddot{a}_{y+1}} \end{aligned}\right)$$

$$= 1 + vp'_{u-1}(1+k)\ddot{a}'_u + v\frac{k}{v(1+k)\ddot{a}'_u}(1+k)\ddot{a}'_u$$

$$= (1+k)(1+vp'_{u-1}\ddot{a}'_u)$$

$$= (1+k)\ddot{a}'_{u-1}$$

である。ここで, $\ddot{a}_{x+m} = (1+k)\ddot{a}'_{x+m}$ であるから, $x \leqq y \leqq x+m$ なるすべての y について $\ddot{a}_y = (1+k)\ddot{a}'_y$ が成り立つ。

従って,

$$_tV_x = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_x} = 1 - \frac{(1+k)\ddot{a}'_{x+t}}{(1+k)\ddot{a}'_x} = 1 - \frac{\ddot{a}'_{x+t}}{\ddot{a}'_x}$$

$$= {}_tV'_x \qquad (0 \leqq {}^\forall t \leqq m)$$

がいえる。

〔別解〕

$x \leqq y < x+m$ で $q'_y = q_y + \dfrac{k}{v\ddot{a}_{y+1}}$ で $k = \dfrac{\ddot{a}_{x+m}}{\ddot{a}'_{x+m}} - 1$ であるから, 同じく

$x \leqq y < x+m$ で

$$(q'_y - q_y)v\ddot{a}_{y+1} = \frac{\ddot{a}_{x+m}}{\ddot{a}'_{x+m}} - 1$$

$$\therefore \quad 1 + v(p_y - p'_y)\ddot{a}_{y+1} = \frac{\ddot{a}_{x+m}}{\ddot{a}'_{x+m}}$$

$$\therefore \quad \ddot{a}_y - \frac{D'_{y+1}}{D'_y}\ddot{a}_{y+1} = \frac{\ddot{a}_{x+m}}{\ddot{a}'_{x+m}} \qquad \left(\because \quad 1 + vp_y\ddot{a}_{y+1} = \ddot{a}_y\right)$$

$$\therefore \quad D'_y\ddot{a}_y - D'_{y+1}\ddot{a}_{y+1} = \frac{\ddot{a}_{x+m}}{\ddot{a}'_{x+m}}D'_y \qquad \cdots\cdots ①$$

が成り立つ。この①式の y に $x+t$, $x+t+1$, $\cdots$, $x+m-1$ $(0 \leqq t \leqq m-1)$ を代入して辺々加えると,

$$D'_{x+t}\ddot{a}_{x+t} - D'_{x+m}\ddot{a}_{x+m} = \frac{\ddot{a}_{x+m}}{\ddot{a}'_{x+m}}(N'_{x+t} - N'_{x+m})$$

$$\therefore\quad \ddot{a}_{x+t} = \frac{D'_{x+m}}{D'_{x+t}}\ddot{a}_{x+m} + \frac{\ddot{a}_{x+m}}{\ddot{a}'_{x+m}}\ddot{a}'_{x+t:\overline{m-t}|}$$

$$= \frac{\ddot{a}_{x+m}}{\ddot{a}'_{x+m}}\left\{ {}_{m-t}E'_{x+t}\ddot{a}'_{x+m} + \ddot{a}'_{x+t:\overline{m-t}|} \right\}$$

$$= \frac{\ddot{a}_{x+m}}{\ddot{a}'_{x+m}}\ddot{a}'_{x+t} \qquad (0 \leqq {}^{\forall}t < m) \quad \cdots\cdots ②$$

ところで，②が $t = m$ で成り立つのは明らか。

$$\therefore\quad \ddot{a}_{x+t} = \frac{\ddot{a}_{x+m}}{\ddot{a}'_{x+m}}\ddot{a}'_{x+t} \qquad (0 \leqq {}^{\forall}t \leqq m)$$

よって，

$${}_tV_x = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_x} = 1 - \frac{\dfrac{\ddot{a}_{x+m}}{\ddot{a}'_{x+m}}\ddot{a}'_{x+t}}{\dfrac{\ddot{a}_{x+m}}{\ddot{a}'_{x+m}}\ddot{a}'_x} = 1 - \frac{\ddot{a}'_{x+t}}{\ddot{a}'_x}$$

$$= {}_tV'_x \qquad (0 \leqq {}^{\forall}t \leqq m)$$

3. 任意の t について $\dfrac{d}{dt}{}_t\overline{V}(\overline{A}_x) \geqq 0$ を示せばよい。ここで，

$${}_t\overline{V}(\overline{A}_x) = 1 - \frac{\overline{a}_{x+t}}{\overline{a}_x}$$

であるので，両辺を t で微分すると，

$$\frac{d}{dt}{}_t\overline{V}(\overline{A}_x) = -\frac{1}{\overline{a}_x}\frac{d}{dt}\overline{a}_{x+t}$$

となるが，

$$\frac{d}{dt}\overline{a}_{x+t} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\overline{N}_{x+t}}{D_{x+t}}\right) = \frac{1}{(D_{x+t})^2}\left(D_{x+t}\frac{d}{dt}\overline{N}_{x+t} - \overline{N}_{x+t}\frac{d}{dt}D_{x+t}\right)$$

$$= \overline{a}_{x+t}(\mu_{x+t}+\delta) - 1 \qquad \left(\begin{array}{l} \because\ \dfrac{d\overline{N}_x}{dx} = -D_x \\ \\ \quad\ \dfrac{dD_x}{dx} = -D_x(\mu_x+\delta) \end{array}\right)$$

であるから

$$\frac{d}{dt}\,{}_t\overline{V}(\overline{A}_x) = \frac{1}{\overline{a}_x}\Big(1-\overline{a}_{x+t}(\mu_{x+t}+\delta)\Big)$$

である。

ここで，

$$\overline{a}_{x+t}(\mu_{x+t}+\delta) = \int_0^\infty \mu_{x+t}\, v^\tau\, {}_\tau p_{x+t}\, d\tau + \delta\overline{a}_{x+t}$$

$$\leqq \int_0^\infty \mu_{x+t+\tau}\, v^\tau\, {}_\tau p_{x+t}\, d\tau + \delta\overline{a}_{x+t} \qquad (\because\ \mu_x \text{ は単調増加})$$

$$= \overline{A}_{x+t} + \delta\overline{a}_{x+t} = 1$$

が成り立つ。

$\overline{a}_x > 0$ であるから $\frac{d}{dt}\,{}_t\overline{V}(\overline{A}_x) \geqq 0$ となり，${}_t\overline{V}(\overline{A}_x)$ が t に関し単調増大であることが示された。

〔別解〕

$\frac{d}{dt}\,{}_t\overline{V}(\overline{A}_x)$ を吟味するのであるが，

$$\frac{d}{dt}\overline{a}_{x+t} = \frac{d}{dt}\int_0^\infty v^\tau\, {}_\tau p_{x+t}\, d\tau$$

$$= \int_0^\infty v^\tau \frac{d}{dt}\, {}_\tau p_{x+t}\, d\tau$$

$$= \int_0^\infty v^\tau\, {}_\tau p_{x+t}(\mu_{x+t} - \mu_{x+t+\tau})\, d\tau$$

から，μ_x が単調増加であることを用いて，

$$\frac{d}{dt}\overline{a}_{x+t} \leqq 0$$

が示され，

$$\frac{d}{dt}\,{}_t\overline{V}(\overline{A}_x) \geqq 0$$

となる。

4. 現在30歳以上の人の数は $T_{30} = \int_{30}^{\infty} l_y\,dy$ である。

この集団について

① 30歳になるまでの生存年数の合計は

$$30 \times T_{30}$$

② 30歳から現在年齢までの生存年数の合計は

$$\int_{30}^{\infty} (y-30)\,l_y\,dy = \Big[-yT_y - Y_y + 30\,T_y\Big]_{30}^{\infty} = Y_{30}$$

③ 将来の生存年数の合計は，y 歳の人 l_y 人の集団の将来生存年数が T_y であることから（〔注〕参照）

$$\int_{30}^{\infty} T_y\,dy = Y_{30}$$

よって，現在30歳以上の人の平均年齢は

$$\frac{30 \times T_{30} + Y_{30}}{T_{30}} = 30 + \frac{Y_{30}}{T_{30}} = 50$$

$$\therefore\ \frac{Y_{30}}{T_{30}} = 20$$

次に，これらの人の死亡時年齢の平均は

$$\frac{30 \times T_{30} + 2 \times Y_{30}}{T_{30}} = 30 + 2 \times \frac{Y_{30}}{T_{30}}$$

$$= 70$$

よって，求める答は70歳である。

〔注〕 x 歳になった時に死亡する人数は $l_x \mu_x\,dx$ であり，これらの人は $x-y$ 年生きて死ぬことになる。よって，l_y 人が全員死ぬまでの生存年数の合計は

$$\int_{y}^{\infty} (x-y)\,l_x \mu_x\,dx = \int_{y}^{\infty} (x\,l_x \mu_x - y\,l_x \mu_x)dx$$

$$= (-x\,l_x - T_x + y\,l_x)\Big|_{x=y}^{\infty}$$

$$= T_y$$

5. 各死因による死亡が各年齢において一様に分布するから,

$$l_{x+t}^{(k)} = l_x^{(k)} - t d_x^{(k)} \qquad (0 \leqq t \leqq 1)\ (k = i,\ j)$$

であり，また,

$$l_{x+t}^{(i)} + l_{x+t}^{(j)} = l_{x+t}\,, \quad d_{x+t}^{(i)} + d_{x+t}^{(j)} = d_{x+t}$$

であるから,

$$l_{x+t} = l_x - t d_x \qquad (0 \leqq t \leqq 1)$$

が成り立つ。

さて，定義により,

$$\mu_{x+t}^{(i)} = -\frac{1}{l_{x+t}} \frac{d\, l_{x+t}^{(i)}}{dt}$$

であるが，これを求めると,

$$\mu_{x+t}^{(i)} = \frac{d_x^{(i)}}{l_{x+t}}$$

である。よって,

$$\int_0^1 \mu_{x+t}^{(i)}\, dt = \int_0^1 \frac{d_x^{(i)}}{l_x - t d_x}\, dt$$

$$= -\frac{d_x^{(i)}}{d_x} \log \frac{l_x - d_x}{l_x}$$

$$\therefore \quad \bar{q}_x^{(i)} = 1 - \left(\frac{l_x - d_x}{l_x}\right)^{\frac{d_x^{(i)}}{d_x}}$$

$$= 1 - (1 - q_x)^{\frac{d_x^{(i)}}{d_x}}$$

$$= 1 - \left\{1 - \frac{d_x^{(i)}}{d_x} q_x + \frac{1}{2} \frac{d_x^{(i)}}{d_x}\left(\frac{d_x^{(i)}}{d_x} - 1\right) q_x^2 - \cdots\cdots \right\}$$

$$\fallingdotseq q_x^{(i)} \left\{1 + \frac{1}{2}(q_x - q_x^{(i)})\right\}$$

$$\fallingdotseq q_x^{(i)} \Big/ \left(1 - \frac{1}{2} q_x^{(j)}\right)$$