昭和57年度（問　題）

1. 成功の確率 p のベルヌイの試みを n 回続ける。この実験において初めて成功するまでの失敗の回数をXとする。

(1) $P(X=k)$ を求めよ。

(2) $E(X)$ を求めよ。

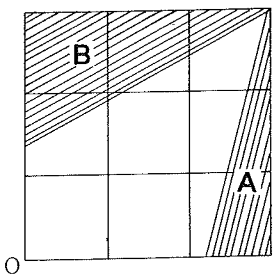
(3) 成功するまで実験を続けるとした場合，失敗の回数の期待値を求めよ。

2. 良品である確率が p であることが分っている製品のひと山を検査するとき，つぎのいずれの検査法による方が合格となりやすいか，ただし，$p<0.1$ とする。

(A) 4個を抜き取って，不良品が1個以下なら合格。

(B) 8個を抜き取って，不良品が2個以下なら合格。

3. 右図において点Oにいる人が，さいころを振って1か2が出れば1目上へ，他が出れば1目右へ進む。何回かこの試行をくりかえして，上または右へ移動して行き，A地区かB地区に入るまで試行をくりかえすものとする。この人がA地区に入る確率およびB地区に入る確率を求めよ。



4. X_1, X_2 は独立でともに平均値0, 分散1の正規分布にしたがう確率変数とする。$\max(X_1, X_2)$ の平均値を求めよ。

5. さいころを続けて投げるとき，r回目 $(r \geq 6)$ で初めて1から6までのすべての目が出る確率を求めよ。

昭和57年度（解答例）

1.　n回とも失敗した場合，$X=n$と定義する。

(1)　$P(X=0)=p, P(X=1)=qp, \cdots, P(X=k)=q^k p\ (0 \leqq k \leqq n-1)$

$P(X=n)=q^n$

(2)　$E(X)=qp+2q^2p+\cdots+(n-1)q^{n-1}p+nq^n$

$$=qp\{1+2q+\cdots+(n-1)q^{n-2}\}+nq^n$$

$$=qp\cdot\frac{d}{dq}(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1})+nq^n$$

$$=qp\cdot\frac{d}{dq}\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)+nq^n$$

$$=qp\cdot\frac{-nq^{n-1}(1-q)+1-q^n}{(1-q)^2}+nq^n$$

$$=\frac{-nq^n p+q-q^{n+1}}{p}+nq^n=\frac{q}{p}(1-q^n)$$

(3)　$qp+2q^2p+\cdots+nq^n p+\cdots\cdots$

$$=qp(1+2q+\cdots+nq^{n-1}+\cdots\cdots)=qp\cdot\frac{d}{dq}(1+q+q^2+\cdots\cdots)$$

$$=qp\frac{d}{dq}\frac{1}{1-q}=qp\cdot\frac{1}{(1-q)^2}=\frac{q}{p}$$

2.　(A)の検査法による場合，不良品が1個以下となる確率 $=p_A$

(B)の検査法による場合，不良品が2個以下となる確率 $=p_B$

とおくと，

$p_A=p^4+\binom{4}{1}p^3(1-p)=p^4+4p^3(1-p)=p^3(4-3p)$

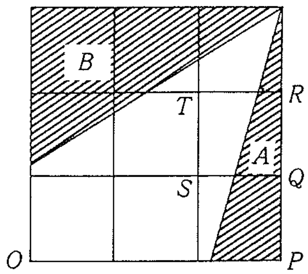
$p_B=p^8+\binom{8}{1}p^7(1-p)+\binom{8}{2}p^6(1-p)^2$

$$=p^8+8p^7(1-p)+28p^6(1-2p+p^2)=p^6(28-48p+21p^2)$$

$p_A-p_B=p^3(4-3p-28p^3+48p^4-21p^5)$

$$=p^3(1-p)^2(4+5p+6p^2-21p^3)>0\quad(\because\ p<0.1)$$

よって，(A)の検査法による方が合格となりやすい。

3. 

$O \to P$の確率 $= \left(\frac{2}{3}\right)^3$

$O \to S \to Q$の確率 $= \binom{3}{1}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^3$

$O \to S \to T \to R$の確率 $= \binom{3}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3$

よって，A地区に入る確率 $= \left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{56}{81}$

B地区に入る確率はその余事象だから　25／81

4. $Y = max(X_1, X_2)$ の分布関数は，

$$P(Y \leq t) = P(X_1 \leq t, X_2 \leq t)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\right)^2$$

$$E(Y) = \frac{2}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\left[\left(-e^{-\frac{t^2}{2}}\right)\cdot\left(\int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\right)\right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

5. r回目までに，iの目が出ないという事象をE_iとし，$i_1, i_2, \cdots, i_6$を1から6までの異なる整数とする。

$$P(E_{i_1}) = \left(\frac{5}{6}\right)^r$$

$$P(E_{i_1} \cap E_{i_2}) = \left(\frac{4}{6}\right)^r$$

$$P(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \cdots \cap E_{i_5}) = \left(\frac{1}{6}\right)^r$$

$$P(E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_6) = 0$$

r 回目までに全部の目が出る確率 $= p_r$

$$= 1 - P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_6)$$

$$= 1 - \left\{\binom{6}{1}\left(\frac{5}{6}\right)^r - \binom{6}{2}\left(\frac{4}{6}\right)^r + \binom{6}{3}\left(\frac{3}{6}\right)^r - \binom{6}{4}\left(\frac{2}{6}\right)^r + \binom{6}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^r\right\}$$

題意の確率 $= p_r - p_{r-1}$

$$= -\binom{6}{1}\left(\frac{5}{6}-1\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{r-1} + \binom{6}{2}\left(\frac{4}{6}-1\right)\left(\frac{4}{6}\right)^{r-1} - \binom{6}{3}\left(\frac{3}{6}-1\right)\left(\frac{3}{6}\right)^{r-1}$$

$$+\binom{6}{4}\left(\frac{2}{6}-1\right)\left(\frac{2}{6}\right)^{r-1} - \binom{6}{5}\left(\frac{1}{6}-1\right)\left(\frac{1}{6}\right)^{r-1}$$

$$= \left(\frac{5}{6}\right)^{r-1} - 5\left(\frac{4}{6}\right)^{r-1} + 10\left(\frac{3}{6}\right)^{r-1} - 10\left(\frac{2}{6}\right)^{r-1} + 5\left(\frac{1}{6}\right)^{r-1}$$