昭和57年度（問　題）

1. つぎの(1)から(15)までについては，それぞれ五つの選択肢の中から，正しいものを一つ選んで，所定の解答用紙に，たとえば，(A)とか(D)のように，記号で記入せよ。

(1) 年始，年末の資産をそれぞれA，Bとし，利廻り i が既知であるとき，年度内の収入利息 I を求める近似式はつぎの式で表わされる。

(A) Ai，　(B) $B-A$，　(C) $\dfrac{A+B}{2}i$，　(D) $\dfrac{i}{2-i}(A+B)$，　(E) $\dfrac{i}{2+i}(A+B)$

(2) つぎの式に関して，正しいものを，選択肢の中から選べ。

(Ⅰ) $q_x=\int_0^1 {}_tp_x\cdot\mu_{x+t}\,dt$　，　(Ⅱ) ${}_{n|}q_x-{}_np_x$，　(Ⅲ) ${}_np_x=e^{\int_0^n\mu_{x+t}dt}$

(A) (Ⅰ)と(Ⅱ)が正しい。　(B) (Ⅰ)と(Ⅲ)が正しい。　(C) (Ⅱ)と(Ⅲ)が正しい。　(D) すべて正しい。

(E) (A)，(B)，(C)，(D)のいずれも正しい事実を述べていない。

(3) つぎの式のうちで，$\mathring{a}_x$ の妥当な近似式を与えているのはどれか。
選択肢の中から正しいものを選べ。

(Ⅰ) $a_x+\dfrac{1}{2}A_x(1+\dfrac{i}{2})$，　(Ⅱ) $(a_x+\dfrac{1}{2})(1-\dfrac{\delta}{2})$，　(Ⅲ) $\dfrac{\delta}{i}(a_x+\dfrac{1}{2})$

(A) (Ⅰ)以外はすべて妥当である。　(B) (Ⅱ)以外はすべて妥当である。

(C) (Ⅲ)以外はすべて妥当である。　(D) すべて妥当である。

(E) (Ⅰ)，(Ⅱ)，(Ⅲ)のいずれも妥当な近似式を与えていない。

(4) 30年満期の保険において，死亡保険金は1，満期保険金は既払込保険料，加入年齢は30歳とする。
最初の10年間の年払保険料を P_1，つぎの20年間の年払保険料を P_2 とする。
$P_2=kP_1$ のとき k はつぎの式で表わされる。

(A) $\dfrac{M_{30}-M_{60}-P_1(N_{30}-N_{40}-10D_{60})}{P_1(N_{40}-N_{60}-20D_{60})}$，　(B) $\dfrac{M_{30}-M_{60}-P_1(N_{30}-N_{40}-10D_{60})}{N_{40}-N_{60}-20D_{60}}$，

(C) $\dfrac{M_{30}-M_{60}+30D_{60}-P_1(N_{30}-N_{40})}{N_{40}-N_{60}}$，　(D) $\dfrac{M_{30}-M_{60}+10D_{60}+20D_{60}}{P_1(N_{40}-N_{60})}$，

(E) $\dfrac{M_{30}-M_{60}-P_1(N_{30}-N_{60})}{P_1(N_{30}-N_{60}-30D_{60})}$，

(5) つぎの式で，${}_tV_x$ を表わしているものはどれか。選択肢の中から正しいものを選べ。

(I) $1-(P_{x+t}+d)\ddot{a}_{x+t}$ ， (II) $1-\dfrac{a_{x+t}}{a_x}$ ， (III) $\dfrac{P_{x+t}-P_x}{P_x+d}$

(A) (I)だけが ${}_tV_x$ を表わしている。 (B) (II)だけが ${}_tV_x$ を表わしている。

(C) (III)だけが ${}_tV_x$ を表わしている。 (D) (I)，(II)，(III)のいずれも ${}_tV_x$ を表わしていない。

(E) (A)，(B)，(C)，(D)のいずれも正しい事実を述べていない。

(6) $a_{\overline{xyz}}$ は，つぎの式で表わされる。

(A) $a_x+a_y+a_z-a_{xyz}$ ， (B) $a_x+a_y+a_z-a_{xy}-a_{yz}-a_{zx}+a_{xyz}$ ，

(C) $a_{xy}+a_{yz}+a_{zx}-a_{xyz}$ ， (D) $\sum_{t=1}^{\infty} v^t\,({}_tp_x+{}_tp_y+{}_tp_z-{}_tp_{xyz})$ ， (E) $\sum_{t=1}^{\infty} v^t\,{}_tp_{xyz}$

(7) $\dfrac{1}{a_{\overline{n|}}}-\dfrac{1}{s_{\overline{n|}}}$ は，つぎの式で表わされる。

(A) i ， (B) v ， (C) $\dfrac{1}{i}$ ， (D) $\dfrac{1}{v}$ ， (E) $\dfrac{i}{v}$

(8) $\mu_x=\dfrac{1}{100-x}$ のとき，${}_{20}p_{30}$ はつぎの値をとる。

(A) $\dfrac{3}{5}$ ， (B) $\dfrac{4}{6}$ ， (C) $\dfrac{5}{7}$ ， (D) $\dfrac{6}{8}$ ， (E) $\dfrac{7}{9}$

(9) $\dfrac{d\bar{a}_x}{dx}$ は，つぎの式で表わされる。

(A) $\bar{a}_x\mu_x-1$ ， (B) $\bar{a}_x\delta-1$ ， (C) $\bar{a}_x(\mu_x+\delta)-1$ ，

(D) $\bar{a}_x(\mu_x-\delta)-1$ ， (E) $\bar{a}_x(\mu_x+\delta)+1$

(10) 死力が定数 μ ならば，$\bar{A}_x$ はつぎの式で表わされる。

(A) $\dfrac{\delta}{\mu-\delta}$ ， (B) $\dfrac{\mu}{\mu-\delta}$ ， (C) $\dfrac{\delta}{\mu+\delta}$ ， (D) $\dfrac{\mu}{\delta-\mu}$ ， (E) $\dfrac{\mu}{\mu+\delta}$

(11) $i=0$ のとき，$(I\bar{A})_x$ は，つぎの式で表わされる。

(A) e_x ， (B) $\mathring{e}_x$ ， (C) $1+e_x$ ， (D) $\sum_{t=0}^{\infty}\mathring{e}_{x+t}$ ， (E) $\sum_{t=0}^{\infty}{}_tp_x\cdot\mathring{e}_{x+t}$

(12) $\ddot{a}_x$ の値が 0.1 だけ増加するとき，A_x の値はいくら変化するか。
A_x の変化について，一番適切なものをつぎの中から選べ。
ただし，利率は年５％で一定とする。

(A) 約 0.0048 だけ増加する。 (B) 約 0.0048 だけ減少する。

(C) 約 0.0050 だけ増加する。 (D) 約 0.0050 だけ減少する。

(E) 与えられた情報だけでは，A_x の変化は判定できない。

(13) ${}_{n|}a_x$ を ${}_{n|}A_x$, ${}_nE_x$, i の式で表わすとつぎのとおりである。

(A) $\dfrac{{}_nE_x-(1+i)\,{}_{n|}A_x}{i}$, (B) $\dfrac{(1+i)\,{}_nE_x-{}_{n|}A_x}{i}$, (C) $\dfrac{{}_nE_x-{}_{n|}A_x}{i}$

(D) $\dfrac{{}_nE_x-i\cdot{}_{n|}A_x}{i}$, (E) $\dfrac{1+i}{i}({}_nE_x-{}_{n|}A_x)$

(14) $P_x=0.015$, $P_{x+1}=0.016$, $p_x=0.99884$ のとき, i の値はつぎのとおりである。

(A) 4%, (B) 5%, (C) 5.5%, (D) 6%, (E) 6.5%

(15) $p_x=0.5$, $A^{1}_{x:\overline{1|}}=0.4$, ${}_1V_x=0.05$ のとき P_x の値はつぎのとおりである。

(A) 0.36, (B) 0.38, (C) 0.40, (D) 0.42, (E) 0.44

2. A氏は, B社に20年間にわたり, 年 100万円の率で始まり, 連続的に増加し, 時点 t $(0\leqq t\leqq 20)$ においては年 $100+10t$ 万円の率をとる連続支払をしなくてはならないが, C社に同期間にわたり, 年 α 万円の率の連続払込をし, C社にB社への支払を代行してもらうことにした。年6%の実利率を仮定し, 上記の収支が相い等しくなる α を求めよ。また, この間に, C社に積立金が発生するが, この積立金が最大に達するのはいつであるか。C社の手数料は考えないものとする。

必要ならば, つぎの数値を用いよ。$\delta=0.058$, $1.06^{20}=3.207$

3. $\dfrac{1}{D_x\ddot{s}_{\overline{n|}}}(C_x\ddot{s}_{\overline{n|}}+C_{x+1}\ddot{s}_{\overline{n-1|}}+\cdots+C_{x+n-1}\ddot{s}_{\overline{1|}})=\dfrac{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}{\ddot{s}_{\overline{n|}}}-\dfrac{D_{x+n}}{D_x}$ を証明せよ。

この恒等式を用いて, 養老保険の保険料をつぎの形に分解せよ。

$$P_{x:\overline{n|}}=P'^{1}_{x:\overline{n|}}+\frac{1}{\ddot{s}_{\overline{n|}}}$$

このとき, $P'^{1}_{x:\overline{n|}}$ はどんな意味を持つか説明せよ。

4. $i\cdot\sum_{t=0}^{\infty}a_{x+t}\cdot{}_tp_x+a_x$ を変形し, その結果が, 何を表わすかを述べよ。

昭和57年度（解答例）

1.

問題番号	解答欄
(1)	(E)
(2)	(E)
(3)	(D)
(4)	(A)
(5)	(D)
(6)	(B)
(7)	(A)
(8)	(C)
(9)	(C)
(10)	(E)
(11)	(C)
(12)	(B)
(13)	(A)
(14)	(C)
(15)	(D)

正解は上表のとおりであるが，以下に問題を再掲すると共に，解法を略記する。

(1) 年始，年末の資産をそれぞれA，Bとし，利廻り i が既知であるとき，年度内の収入利息 I を求める近似式はつぎの式で表わされる。

(A) $\mathrm{A}i$,　(B) $\mathrm{B}-\mathrm{A}$,　(C) $\dfrac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}i$,　(D) $\dfrac{i}{2-i}\left(\mathrm{A}+\mathrm{B}\right)$,

(E) $\dfrac{i}{2+i}\left(\mathrm{A}+\mathrm{B}\right)$

（解）　利廻りに関するハーディーの公式は，

$$i \fallingdotseq \frac{2\mathrm{I}}{\mathrm{A}+\mathrm{B}-\mathrm{I}}$$

これをＩについて解けば，(E)をうる。即ち

$$i(\mathrm{A}+\mathrm{B}-\mathrm{I}) \fallingdotseq 2\mathrm{I}$$

$$(2+i)\mathrm{I} \fallingdotseq i(\mathrm{A}+\mathrm{B})$$

$$\mathrm{I} \fallingdotseq \frac{i}{2+i}\left(\mathrm{A}+\mathrm{B}\right)$$

(2)　つぎの式に関して，正しいものを，選択肢の中から選べ。

(Ⅰ)　$q_x = \int_0^1 {}_tp_x \cdot \mu_{x+t}\,dt$,　(Ⅱ)　${}_{n|}q_x = {}_np_x$,　(Ⅲ)　${}_np_x = e^{\int_0^n \mu_{x+t}\,dt}$

(A)　(Ⅰ)と(Ⅱ)が正しい。　(B)　(Ⅰ)と(Ⅲ)が正しい。　(C)　(Ⅱ)と(Ⅲ)が正しい。

(D)　すべて正しい。　(E)　(A), (B), (C), (D)のいずれも正しい事実を述べていない。

（解）　(Ⅰ)の式は正しく，

(Ⅱ)については，

$$ {}_{n|}q_x = \frac{l_{x+n}-l_{x+n+1}}{l_x} $$

$$ = {}_np_x - {}_{n+1}p_x $$

が正しく，

(Ⅲ)については，

$$ {}_np_x = e^{-\int_0^n \mu_{x+t}\,dt} $$

が正しいので，

正しいのは(Ⅰ)だけということになり，正解は(E)である。

(3)　つぎの式のうちで，$\mathring{a}_x$ の妥当な近似式を与えているのはどれか。選択肢の中から正しいものを選べ。

(Ⅰ)　$a_x+\frac{1}{2}A_x\left(1+\frac{i}{2}\right)$,　(Ⅱ)　$\left(a_x+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{\delta}{2}\right)$,　(Ⅲ)　$\frac{\delta}{i}\left(a_x+\frac{1}{2}\right)$

(A)　(Ⅰ)以外はすべて妥当である。　(B)　(Ⅱ)以外はすべて妥当である。

(C)　(Ⅲ)以外はすべて妥当である。　(D)　すべて妥当である。

(E)　(Ⅰ), (Ⅱ), (Ⅲ)のいずれも妥当な近似式を与えていない。

（解）　(Ⅰ), (Ⅱ), (Ⅲ)はすべて，$\mathring{a}_x$ の妥当な近似式なので，正解は(D)である。

完全年金の現価 $\mathring{a}_x$ は，端数不払年金の現価 a_x に，(x)生存の最後の期の生存端数期間の支払額の現価を加えたものに等しい。この端数期間に対する支払

額は，各期平均して $\frac{1}{2}$ とみれば，

$$\mathring{a}_x \fallingdotseq a_x + \frac{1}{2}\bar{A}_x \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

①の右辺に $\bar{A}_x \fallingdotseq A_x\left(1+\frac{i}{2}\right)$ を代入すると，(I)をうる。

また，①の右辺に $\bar{A}_x = 1-\delta\bar{a}_x$ を代入すると，

$$\mathring{a}_x \fallingdotseq a_x + \frac{1}{2}\left(1-\delta\bar{a}_x\right)$$

これに，さらに $\bar{a}_x \fallingdotseq a_x + \frac{1}{2}$ を代入すると，(II)をうる。

つぎに(III)であるが，金額1を利率 i で，(x) の死亡まで投資したとすると，毎年利息 i が支払われ，(x) 死亡の年には端数期間に対する利息が支払われる。この利息の現価は $i\mathring{a}_x$ で，(x) 死亡の際に残る元金1の現価は $\bar{A}_x$ である。従って

$$1 = i\mathring{a}_x + \bar{A}_x$$

が成立するが，これに $\bar{A}_x = 1-\delta\bar{a}_x$ を代入すると，$\mathring{a}_x = \frac{\delta}{i}\bar{a}_x$，さらに $\bar{a}_x \fallingdotseq a_x + \frac{1}{2}$ を代入すると，(III)をうる。

(4) 30年満期の保険において，死亡保険金は1，満期保険金は既払込保険料，加入年齢は30歳とする。最初の10年間の年払保険料を P_1，つぎの20年間の年払保険料を P_2 とする。$P_2 = kP_1$ のとき k はつぎの式で表わされる。

(A) $\dfrac{M_{30}-M_{60}-P_1(N_{30}-N_{40}-10D_{60})}{P_1(N_{40}-N_{60}-20D_{60})}$，　(B) $\dfrac{M_{30}-M_{60}-P_1(N_{30}-N_{40}-10D_{60})}{N_{40}-N_{60}-20D_{60}}$，

(C) $\dfrac{M_{30}-M_{60}+30D_{60}-P_1(N_{30}-N_{40})}{N_{40}-N_{60}}$，　(D) $\dfrac{M_{30}-M_{60}+10D_{60}+20D_{60}}{P_1(N_{40}-N_{60})}$，

(E) $\dfrac{M_{30}-M_{60}-P_1(N_{30}-N_{60})}{P_1(N_{30}-N_{60}-30D_{60})}$

（解） 題意により，

収入の現価は，　$P_1(N_{30}-N_{40})+kP_1(N_{40}-N_{60})$

支出の現価は，　$M_{30}-M_{60}+(10P_1+20kP_1)D_{60}$

収支相等の原則により，上記両式を等しいと置いて，k について解けば，(A)をうる。

(5) つぎの式で，${}_tV_x$ を表わしているものはどれか。選択肢の中から正しいものを選べ。

(I) $1-(P_{x+t}+d)\ddot{a}_{x+t}$，　(II) $1-\dfrac{a_{x+t}}{a_x}$，　(III) $\dfrac{P_{x+t}-P_x}{P_x-d}$

(A) (I)だけが ${}_tV_x$ を表わしている。　(B) (II)だけが ${}_tV_x$ を表わしている。

(C) (III)だけが ${}_tV_x$ を表わしている。

(D) (I)，(II)，(III)のいずれも ${}_tV_x$ を表わしていない。

(E) (A)，(B)，(C)，(D) のいずれも正しい事実を述べていない。

（解） (I)は正しくなく，$1-(P_x+d)\ddot{a}_{x+t}$ が正しい。

(II)も正しくなく，$1-\dfrac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_x}$ が正しい。

(III)も正しくなく，$\dfrac{P_{x+t}-P_x}{P_{x+t}+d}$ が正しい。

従って，正解は(D)である。

(6) $a_{\overline{xyz}}$ は，つぎの式で表わされる。

(A) $a_x+a_y+a_z-a_{xyz}$，　(B) $a_x+a_y+a_z-a_{xy}-a_{yz}-a_{zx}+a_{xyz}$，

(C) $a_{xy}+a_{yz}+a_{zx}-a_{xyz}$，　(D) $\sum_{t=1}^{\infty} v^t({}_tp_x+{}_tp_y+{}_tp_z-{}_tp_{xyz})$，

(E) $\sum_{t=1}^{\infty} v^t\,{}_tp_{xyz}$

（解） $a_{\overline{xyz}}$ は，(x)，(y)，(z) の最終生存者連生年金の現価で，正解は(B)である。

(7) $\dfrac{1}{a_{\overline{n|}}}-\dfrac{1}{s_{\overline{n|}}}$ は，つぎの式で表わされる。

(A) i，　(B) v，　(C) $\dfrac{1}{i}$，　(D) $\dfrac{1}{v}$，　(E) $\dfrac{i}{v}$

（解）　$a_{\overline{n}|} = \dfrac{1-v^n}{i} = \dfrac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}$

$s_{\overline{n}|} = \dfrac{(1+i)^n-1}{i}$

この両式より $\dfrac{1}{a_{\overline{n}|}} - \dfrac{1}{s_{\overline{n}|}}$ を計算すれば i をうる。正解は(A)である。

(8)　$\mu_x = \dfrac{1}{100-x}$ のとき，${}_{20}p_{30}$ はつぎの値をとる。

(A) $\dfrac{3}{5}$，　(B) $\dfrac{4}{6}$，　(C) $\dfrac{5}{7}$，　(D) $\dfrac{6}{8}$，　(E) $\dfrac{7}{9}$

（解）　${}_np_x = e^{-\int_0^n \mu_{x+t}\,dt}$ あるいは $\log {}_np_x = -\int_0^n \mu_{x+t}\,dt$ なので，

$$
\begin{aligned}
\log {}_{20}p_{30} &= -\int_0^{20} \frac{dt}{100-(30+t)} \\
&= \Big[\log(70-t)\Big]_0^{20} \\
&= \log 50 - \log 70 \\
&= \log \frac{5}{7}
\end{aligned}
$$

より ${}_{20}p_{30} = \dfrac{5}{7}$ をうる。正解は(C)である。

(9)　$\dfrac{d\bar{a}_x}{dx}$ は，つぎの式で表わされる。

(A) $\bar{a}_x\mu_x-1$，　(B) $\bar{a}_x\delta-1$，　(C) $\bar{a}_x(\mu_x+\delta)-1$，

(D) $\bar{a}_x(\mu_x-\delta)-1$，　(E) $\bar{a}_x(\mu_x+\delta)+1$

（解）　$\dfrac{d\bar{a}_x}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\bar{N}_x}{D_x}\right)$

$$= \frac{1}{(D_x)^2}\left(D_x\frac{d\bar{N}_x}{dx} - \bar{N}_x\frac{dD_x}{dx}\right)$$

ここで，$\bar{N}_x = \int_x^\infty D_y\,dy$ より $\dfrac{d\bar{N}_x}{dx} = -D_x$

また，$\dfrac{dD_x}{dx} = -v^x l_x \mu_x - v^x l_x \delta$

$$= -D_x(\mu_x+\delta)$$

なので，これらを上式の右辺に代入すれば，(C)をうる。

(10) 死力が定数 μ ならば，$\bar{A}_x$ はつぎの式で表わされる。

(A) $\dfrac{\delta}{\mu-\delta}$，　(B) $\dfrac{\mu}{\mu-\delta}$，　(C) $\dfrac{\delta}{\mu+\delta}$，　(D) $\dfrac{\mu}{\delta-\mu}$，　(E) $\dfrac{\mu}{\mu+\delta}$

（解）$\bar{A}_x = \displaystyle\int_0^\infty v^t\,{}_tp_x\,\mu_{x+t}\,dt$

$$= \mu\int_0^\infty v^t\,{}_tp_x\,dt$$

$$= \mu\bar{a}_x$$

一方，$\bar{A}_x = 1-\delta\bar{a}_x$

これら両式より $\bar{a}_x$ を消去すれば，(E)をうる。

(11) $i=0$ のとき，$(I\bar{A})_x$ は，つぎの式で表わされる。

(A) e_x，　(B) $\mathring{e}_x$，　(C) $1+e_x$，　(D) $\displaystyle\sum_{t=0}^\infty \mathring{e}_{x+t}$，　(E) $\displaystyle\sum_{t=0}^\infty {}_tp_x\cdot\mathring{e}_{x+t}$

（解）$(I\bar{A})_x = \dfrac{1}{D_x}\displaystyle\sum_{t=0}^\infty (t+1)\,\bar{C}_{x+t}$

$$= \frac{1}{D_x}\sum_{t=0}^\infty (t+1)\int_0^1 v^{x+t+\tau}\,l_{x+t+\tau}\,\mu_{x+t+\tau}\,d\tau$$

$i=0$ なので，この式は

$$= \frac{1}{l_x}\sum_{t=0}^\infty (t+1)\int_0^1 l_{x+t+\tau}\,\mu_{x+t+\tau}\,d\tau$$

$$= \frac{1}{l_x}\sum_{t=0}^\infty (t+1)\,d_{x+t}$$

$$= \frac{l_x+l_{x+1}+l_{x+2}+\cdots\cdots}{l_x}$$

$$= 1+e_x$$

であり，正解は(C)である。

(12) $\ddot{a}_x$ の値が0.1だけ増加するとき，A_xの値はいくら変化するか。A_x の変化について，一番適切なものをつぎの中から選べ。ただし，利率は年５％で一定とする。

(A) 約0.0048だけ増加する。　(B) 約0.0048だけ減少する。

(C) 約0.0050だけ増加する。　(D) 約0.0050だけ減少する。

(E) 与えられた情報だけでは，A_x の変化は判定できない。

（解）$A_x = 1-d\ddot{a}_x$

ここで，$\ddot{a}_x$ が $\ddot{a}'_x$ へ変化したとき A_x も A'_x に変化したとすると，

$$A'_x = 1-d\ddot{a}'_x$$

$$\begin{aligned} A'_x-A_x &= -d(\ddot{a}'_x-\ddot{a}_x) \\ &= -\frac{i}{1+i}\left(\ddot{a}'_x-\ddot{a}_x\right) \\ &= -\frac{0.05}{1+0.05}\times 0.1 \\ &= -0.00476 \\ &\fallingdotseq -0.0048 \end{aligned}$$

即ち，正解は(B)である。

(13) ${}_{n|}a_x$ を ${}_{n|}A_x$，${}_nE_x$，i の式で表わすとつぎのとおりである。

(A) $\dfrac{{}_nE_x-(1+i)\,{}_{n|}A_x}{i}$，　(B) $\dfrac{(1+i)\,{}_nE_x-{}_{n|}A_x}{i}$，　(C) $\dfrac{{}_nE_x-{}_{n|}A_x}{i}$，

(D) $\dfrac{{}_nE_x-i\cdot{}_{n|}A_x}{i}$，　(E) $\dfrac{1+i}{i}\left({}_nE_x-{}_{n|}A_x\right)$

（解）$(1+i)C_x = D_x-(1+i)D_{x+1}$ に注意して，以下の変形を行なう。

$$\begin{aligned} (1+i)\,{}_{n|}A_x &= \frac{(1+i)(C_{x+n}+C_{x+n+1}+\cdots\cdots)}{D_x} \\ &= \frac{D_{x+n}+D_{x+n+1}+\cdots\cdots-(1+i)(D_{x+n+1}+D_{x+n+2}+\cdots\cdots)}{D_x} \\ &= \frac{D_{x+n}-i(D_{x+n+1}+D_{x+n+2}+\cdots\cdots)}{D_x} \end{aligned}$$

$$ {}_{n|}a_x = \frac{D_{x+n+1}+D_{x+n+2}+\cdots\cdots}{D_x} $$

を上式の右辺に代入して，${}_nE_x = \dfrac{D_{x+n}}{D_x}$ に注意して，${}_{n|}a_x$ について解けば，

(A)をうる。

(14) $P_x = 0.015$，$P_{x+1} = 0.016$，$p_x = 0.99884$ のとき，i の値はつぎのとおりである。

(A) 4％，　(B) 5％，　(C) 5.5％，　(D) 6％，　(E) 6.5％

（解） $P_x = \dfrac{1}{\ddot{a}_x} - d$ ....①

$P_{x+1} = \dfrac{1}{\ddot{a}_{x+1}} - d$ ....②

一方，

$\ddot{a}_x = 1 + vp_x\ddot{a}_{x+1}$ ....③

①，②を $\ddot{a}_x$，$\ddot{a}_{x+1}$ について解いて，③に代入すると，

$\dfrac{1}{P_x+d} = 1 + vp_x\dfrac{1}{P_{x+1}+d}$ ....④

ここで，i の求め方について，二つの方法が考えられる。

1） $v = \dfrac{1}{1+i}$，$d = \dfrac{i}{1+i}$ を④に代入して，整理すると

$$ \frac{1+i}{(1+i)P_x+i} = 1 + \frac{p_x}{(1+i)P_{x+1}+i} $$

この両辺に $i = 4$％，5％，…… を順次代入して，両辺の値を比べ $i =$ 5.5％をうる。正解は(C)である。

i = 4％のとき	左辺	= 18.70504
	右辺	= 18.6349
	左辺	＞ 右辺
i = 5％のとき	左辺	= 15.96958
	右辺	= 15.95269
	左辺	＞ 右辺

$i=5.5$％のとき　左辺 ＝ 14.89587

右辺 ＝ 14.89594

左辺 ＜ 右辺

$i=6$％のとき　左辺 ＝ 13.96574

右辺 ＝ 13.97869

左辺 ＜ 右辺

$i=5.5$％のとき，左辺−右辺の符号が変り，かつ差が最も小さいので，正解を(C)とする。

つぎに，

2）$d=1-v$ に注意して，④を変形すると，

$$(1-p_x)v^2-\{P_{x+1}+(1-p_x)(P_x+1)\}v+P_x(P_{x+1}+1)=0$$

この式に p_x，P_{x+1}，P_x の値を代入すると，

$$(1-0.99884)v^2-\{0.016+(1-0.99884)\cdot(0.015+1)\}v +0.015(0.016+1)=0$$

この式の v の係数を計算して

$$0.00116v^2-0.0171774v+0.01524=0$$

$$58v^2-858.87v+762=0$$

この v についての２次方程式を解いて，それから i を求める。

$$v=\frac{858.87\pm\sqrt{858.87^2-4\cdot58\cdot762}}{2\times58}$$

$$=\frac{858.87\pm\sqrt{560,873.6769}}{116}$$

$$=\frac{858.87\pm748.91}{116}$$

$v=13.8602$ または 0.9479 であるが $v\leqq1$ より

$$\frac{1}{1+i}=0.9479$$

$$\therefore\quad i=0.05496$$

なので，正解を(C)の5.5％とする。

(15) $p_x=0.5$, $A^{1}_{x:\overline{1}|}=0.4$, ${}_1V_x=0.05$ のとき P_x の値はつぎのとおりである。

(A) 0.36, (B) 0.38, (C) 0.40, (D) 0.42, (E) 0.44

（解） 過去法で

$$ {}_1V_x = P_x\cdot\frac{D_x}{D_{x+1}}-\frac{C_x}{D_{x+1}} $$

この式より

$$ P_x=\frac{D_{x+1}}{D_x}\cdot {}_1V_x+\frac{C_x}{D_x} $$

$$ = v\cdot p_x\cdot {}_1V_x + A^{1}_{x:\overline{1}|} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots ① $$

ここで $A^{1}_{x:\overline{1}|}=\dfrac{C_x}{D_x}$

$$ =\frac{vD_x-D_{x+1}}{D_x} $$

$$ =v(1-p_x) $$

より $v=\dfrac{A^{1}_{x:\overline{1}|}}{1-p_x}$

これを，①の右辺に代入すると

$$ P_x=\frac{A^{1}_{x:\overline{1}|}}{1-p_x}\cdot p_x\cdot {}_1V_x + A^{1}_{x:\overline{1}|} $$

この式の右辺に，与えられた値を代入して

$$ P_x=\frac{0.4}{1-0.5}\cdot 0.5\cdot 0.05+0.4 $$

$$ =0.42 $$

これよりして，正解は(D)である。

2. 金額は万円単位で表わすことにする。

題意により，

$$ \alpha\bar{a}_{\overline{20}|}=100\bar{a}_{\overline{20}|}+10(\bar{I}\bar{a})_{\overline{20}|} $$

$$(\bar{I}\bar{a})_{\overline{20|}} = \int_0^{20} tv^t\, dt$$

$$= \left[-\frac{tv^t}{\delta}\right]_0^{20} + \frac{1}{\delta}\int_0^{20} v^t\, dt$$

$$= \frac{-20v^{20}+\bar{a}_{\overline{20|}}}{\delta} \quad \text{なので}$$

$$\alpha\bar{a}_{\overline{20|}} = 100\bar{a}_{\overline{20|}} + 10\frac{\bar{a}_{\overline{20|}} - 20v^{20}}{\delta}$$

$$\bar{a}_{\overline{20|}} = \frac{1-v^{20}}{\delta} = \frac{1.06^{20}-1}{\delta}\cdot v^{20} \quad \text{なので}$$

$$\alpha = 100 + \frac{10}{\delta} - \frac{200}{1.06^{20}-1}$$

$$= 100 + \frac{10}{0.058} - \frac{200}{3.207-1}$$

$$= 100 + 172.414 - 90.621$$

$$= 181.793$$

時期 t の積立金を S_t とすれば，S_t が最大額に達する t は

$\dfrac{dS_t}{dt} = 0$　から求められる。

$$S_t = \int_0^t \{\alpha - (100+10\tau)\} e^{\delta(t-\tau)}\, d\tau$$

$$= e^{\delta t}\left\{(\alpha-100)\int_0^t e^{-\delta\tau}\, d\tau - 10\int_0^t \tau e^{-\delta\tau}\, d\tau\right\}$$

ここで

$$\int_0^t e^{-\delta\tau}\, d\tau = \frac{1-e^{-\delta t}}{\delta}$$

$$\int_0^t \tau e^{-\delta\tau}\, d\tau = \left[-\frac{\tau e^{-\delta\tau}}{\delta}\right]_0^t + \int_0^t \frac{e^{-\delta\tau}}{\delta}\, d\tau$$

$$= -\frac{te^{-\delta t}}{\delta} + \frac{1-e^{-\delta t}}{\delta^2} \quad \text{なので}$$

$$S_t = e^{\delta t}\left\{(\alpha-100)\frac{1-e^{-\delta t}}{\delta}+\frac{10te^{-\delta t}}{\delta}-\frac{10(1-e^{-\delta t})}{\delta^2}\right\}$$

$$= \frac{\alpha-100}{\delta}e^{\delta t}-\frac{\alpha-100}{\delta}+\frac{10}{\delta}t-\frac{10}{\delta^2}e^{\delta t}+\frac{10}{\delta^2}$$

従って

$$\frac{dS_t}{dt} = (\alpha-100)e^{\delta t}+\frac{10}{\delta}-\frac{10}{\delta}e^{\delta t}$$

$$= \frac{1}{\delta}\left\{(\alpha\delta-100\delta-10)e^{\delta t}+10\right\}$$

ここで $\frac{dS_t}{dt} = 0$ とおくと，

$$(\alpha\delta-100\delta-10)e^{\delta t}+10 = 0$$

これより

$$\delta_t = \log\frac{10}{100\delta+10-\alpha\delta}$$

$$\therefore \quad t = -\frac{1}{\delta}\log\left(1-\frac{\alpha-100}{10}\delta\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

$$= -\frac{1}{0.058}\log\left(1-\frac{181.793-100}{10}\times 0.058\right)$$

$$= -\frac{1}{0.058}\log(1-8.1793\times 0.058)$$

$$= -\frac{1}{0.058}\log(1-0.47440)$$

$$= -\frac{1}{0.058}\log 0.52560$$

$$= -\frac{1}{0.058}\times(-0.64321)$$

$$= 11.09$$

（注） 出題では 1.06^{20} が3.027と誤っていたが，ここでは訂正しておいた。出題ど

おりの数値で計算すると，α と t はそれぞれ，$\alpha = 173.746$，$t = 9.62$ となるが，これも正解とした。なお，対数計算のできる電卓がないと，t の具体的な数値は求められないが，上記(＊)の段階まで t を求めたものも正解とし，受験生には不利とならないように配慮したことをお知らせします。

3. $C_{x+t-1} = vD_{x+t-1} - D_{x+t}$ に注意すれば

$$\text{左辺} = \frac{1}{D_x \ddot{s}_{\overline{n}|}} \sum_{t=1}^{n} (vD_{x+t-1} - D_{x+t}) \ddot{s}_{\overline{t}|}$$

$$= \frac{1}{D_x \ddot{s}_{\overline{n}|}} \left\{ \sum_{t=1}^{n} (1 + \ddot{s}_{\overline{t-1}|}) D_{x+t-1} - \sum_{t=1}^{n} \ddot{s}_{\overline{t}|} D_{x+t} \right\}, \qquad (\ddot{s}_{\overline{0}|} = 0 \text{ とする})$$

$$= \frac{1}{D_x \ddot{s}_{\overline{n}|}} \left(N_x - N_{x+n} - \ddot{s}_{\overline{n}|} D_{x+n} \right)$$

$$= \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{s}_{\overline{n}|}} - \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

$$= \text{右辺}$$

n 年満期養老保険の年払純保険料中から，満期保険金 1 を得るために定期積金としてこれを積み立てるものとすると，その掛金額は $\dfrac{1}{\ddot{s}_{\overline{n}|}}$ であり，第 t 年度末の定期積金の積立金の額は $\dfrac{\ddot{s}_{\overline{t}|}}{\ddot{s}_{\overline{n}|}}$ となる。

よって，第 t 年度の死亡に際しては，死亡保険金額 $1 - \dfrac{\ddot{s}_{\overline{t}|}}{\ddot{s}_{\overline{n}|}}$ の逓減定期保険の保険金と定期積金の積立金 $\dfrac{\ddot{s}_{\overline{t}|}}{\ddot{s}_{\overline{n}|}}$ の合計額 1 が支払われると考えてもよい。

一方，

$$P_{x:\overline{n}|} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{D_x} \sum_{t=1}^{n} C_{x+t-1} + \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

$$= \frac{1}{D_x} \left\{ \sum_{t=1}^{n} \left(1 - \frac{\ddot{s}_{\overline{t}|}}{\ddot{s}_{\overline{n}|}}\right) C_{x+t-1} + \sum_{t=1}^{n} \frac{\ddot{s}_{\overline{t}|}}{\ddot{s}_{\overline{n}|}} C_{x+t-1} \right\} + \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

ここで，前段の結果を用いると

$$P_{x:\overline{n|}}\cdot\ddot{a}_{x:\overline{n|}}=\frac{1}{D_x}\sum_{t=1}^{n}\left(1-\frac{\ddot{S}_{\overline{t|}}}{\ddot{S}_{\overline{n|}}}\right)C_{x+t-1}+\frac{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}{\ddot{S}_{\overline{n|}}}$$

$$\therefore\quad P_{x:\overline{n|}}=\frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}\cdot\frac{1}{D_x}\sum_{t=1}^{n}\left(1-\frac{\ddot{S}_{\overline{t|}}}{\ddot{S}_{\overline{n|}}}\right)C_{x+t-1}+\frac{1}{\ddot{S}_{\overline{n|}}}$$

この式と，与式をくらべると，$P'^{\,1}_{x:\overline{n|}}$ は，第 t 年度の死亡保険金額が $1-\dfrac{\ddot{S}_{\overline{t|}}}{\ddot{S}_{\overline{n|}}}$ であるような，死亡保険金年末払の逓減定期保険の平準純保険料であることがわかる。

4. $$a_{x+t}\cdot{}_tp_x=\frac{N_{x+t+1}}{D_{x+t}}\cdot\frac{l_{x+t}}{l_x}$$

$$=\frac{1}{l_x}\left(l_{x+t+1}v+l_{x+t+2}v^2+l_{x+t+3}v^3+\cdots\cdots\right)$$

$$\sum_{t=0}^{\infty}a_{x+t}\cdot{}_tp_x=\frac{1}{l_x}\left\{l_{x+1}v+l_{x+2}(v+v^2)+l_{x+3}(v+v^2+v^3)+\cdots\cdots\right\}$$

$$=\frac{v}{l_x}\left(l_{x+1}+l_{x+2}\frac{1-v^2}{1-v}+l_{x+3}\frac{1-v^3}{1-v}+\cdots\cdots\right)$$

$$=\frac{v}{1-v}\cdot\frac{1}{l_x}\left\{l_{x+1}+l_{x+2}+l_{x+3}+\cdots\cdots-(l_{x+1}v+l_{x+2}v^2+l_{x+3}v^3+\cdots\cdots)\right\}$$

$$=\frac{1}{i}\left(\frac{\sum_{t=1}^{\infty}l_{x+t}}{l_x}-\frac{\sum_{t=1}^{\infty}l_{x+t}v^t}{l_x}\right)$$

$$=\frac{1}{i}\left(e_x-a_x\right)$$

$$\therefore\quad i\sum_{t=0}^{\infty}a_{x+t}\cdot{}_tp_x+a_x=e_x$$

上記の変形の結果よりして，与式は（略算）平均余命を表わしているといえる。