昭和56年度（問　題）

1. 甲，乙２人がサイコロを交互に投げて早く６の目を出したものを勝ちとする。甲より始めるとき，甲の勝ち（A），乙の勝ち（B）の確率を求めよ。ただし，勝負はいずれか一方が勝つまで続けるものとする。

2. X_1，X_2 はいずれも小数第１位を４捨５入したときの丸めの誤差とする。X_1，X_2 を独立と仮定して $P\left(-\frac{1}{3} < X_1 + X_2 < \frac{1}{2}\right)$ を求めよ。ただし，丸めの誤差 X_1，X_2 は $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ の上の一様分布に従うものとする。

3. 硬貨を３回続けて投げるとき，３回のうち１回だけ裏がでるか，３回とも裏である場合のみを根元事象とする標本空間を考え，各根元事象に等確率を与える。このとき，次の３つの事象について以下のことが成立することを示せ。

A_1 ：１回目が裏　　A_2 ：２回目が裏　　A_3 ：３回目が裏

(1) A_i，A_j（i，$j=1, 2, 3$;　$i \neq j$）は独立である。

(2) A_1，A_2，A_3 は独立でない。

4. たて，横の長さが a，b の長方形の辺上にランダムに２点甲，乙をとる。甲，乙間の距離の平方の期待値を求めよ。

5. $(N+1)$ 個の壷がある。それぞれの壷には，合計 N 個の赤と白のボールが入っており，k 番目の壷には k 個の赤いボールと $(N-k)$ 個の白いボールが入っているとする（$k=0, 1, 2, \cdots\cdots, N$）．まず，ランダムに壷を１つ選び，その壷から $(n+1)$ 回ボールをランダムに取り出す。取り出されたボールは毎回もとに戻すものとする。

(1) 最初に取り出された n 個のボールがすべて赤色（事象A）であったとき，$(n+1)$ 番目のボールも赤色（事象B）である条件付確率 P（B｜A）を求めよ。

(2) N が大きいとき，次の近似式が成立つことを示せ。

$$P(B \mid A) \fallingdotseq \frac{n+1}{n+2}$$

昭和56年度（解答例）

1. サイコロを投げ続けて，第 n 回目に初めて6の目が出るという事象を E_n とするとその確率 $P(E_n)$ は，

$$P(E_n)=\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

である。

甲より投げ始めるのであるから，Aが起るには奇数回目に初めて6の目が出ればよく，また，Bが起るには偶数回目に初めて6の目が出ればよい。すなわち，

$$A=\sum_{k=1}^{\infty}E_{2k-1},\quad B=\sum_{k=1}^{\infty}E_{2k}\qquad (\text{ここで}\Sigma\text{は直和})$$

である。

よって，

$$P(A)=P\left(\sum_{k=1}^{\infty}E_{2k-1}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}P(E_{2k-1})=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{2k-2}$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^2}=\frac{1}{6}\cdot\frac{36}{11}=\frac{6}{11}$$

$$P(B)=P\left(\sum_{k=1}^{\infty}E_{2k}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}P(E_{2k})=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{2k-1}$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{\frac{5}{6}}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^2}=\frac{5}{36}\cdot\frac{36}{11}=\frac{5}{11}$$

となる。

2. X_1, X_2 の確率密度関数を $f(x)$ とすると

$$f(x)=\begin{cases}1 & -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}\\ 0 & \text{その他}\end{cases}$$

であり，$Y=X_1+X_2$ の確率密度関数を $g(y)$ とすると，X_1 と X_2 が独立であることから，

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y-x) f(x)\, dx$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(y-x)\, dx$$

$$= \int_{y-\frac{1}{2}}^{y+\frac{1}{2}} f(t)\, dt \qquad (y-x=t \text{ とおいた。})$$

ここで，右図より

$-1 < y \leqq 0$ のとき

$$g(y) = \int_{-\frac{1}{2}}^{y+\frac{1}{2}} 1 \cdot dt = y+1$$

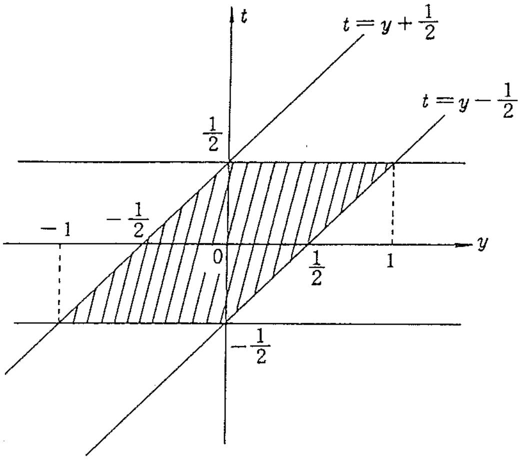
$0 < y < 1$ のとき

$$g(y) = \int_{y-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1 \cdot dt = 1-y$$

その他のとき

$$g(y) = 0$$

となる。



従って，

$$P\left(-\frac{1}{3} < X_1 + X_2 < \frac{1}{2}\right) = \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} g(y)\, dy$$

$$= \int_{-\frac{1}{3}}^{0} (y+1)\, dy + \int_{0}^{\frac{1}{2}} (1-y)\, dy = \frac{47}{72}$$

〔別解〕

X_1 と X_2 の結合確率密度関数を $g(x_1, x_2)$ とすると，

$$P\left(-\frac{1}{3} < X_1 + X_2 < \frac{1}{2}\right) = \iint_{-\frac{1}{3} < x_1 + x_2 < \frac{1}{2}} g(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2$$

である。ここで，X_1，X_2 の確率密度関数を $f(x)$ とすると，X_1 と X_2 が独立であることから，

$$g(x_1, x_2) = f(x_1) f(x_2)$$

である。

よって

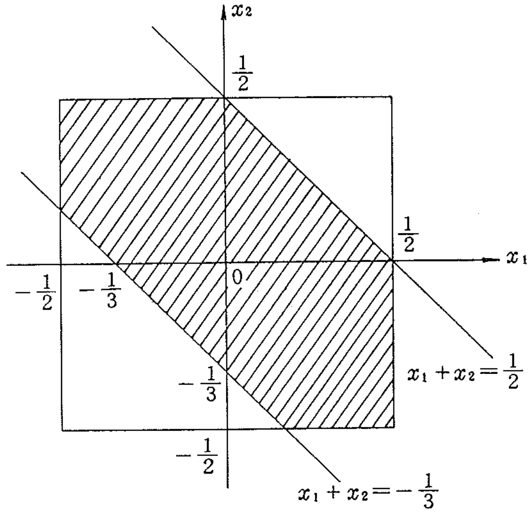
$$\iint_{-\frac{1}{3}<x_1+x_2<\frac{1}{2}} g(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = \iint_{-\frac{1}{3}<x_1+x_2<\frac{1}{2}} f(x_1) f(x_2)\, dx_1\, dx_2$$

$$= \iint_{\substack{-\frac{1}{3}<x_1+x_2<\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}<x_1<\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}<x_2<\frac{1}{2}}} 1 \times 1\, dx_1\, dx_2$$

となり，これは明らかに右図の斜線部の面積である。それを求めると

$$\frac{47}{72}$$

となる。



3. (1) 硬貨を投げて表が出るのをH，裏が出るのをTで表わすとすると，根元事象は次の4つである。

B_1 ： 1回目が裏であとは表　　$i.e.$ (T, H, H)

B_2 ： 2回目が裏であとは表　　$i.e.$ (H, T, H)

B_3 ： 3回目が裏であとは表　　$i.e.$ (H, H, T)

B_4 ： 3回とも裏　　$i.e.$ (T, T, T)

そして，これらに等確率を与えているから

$$P(B_i) = \frac{1}{4} \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

である。

ところで，事象A_1, A_2, A_3は，

$$A_1 = B_1 \cup B_4, \quad A_2 = B_2 \cup B_4, \quad A_3 = B_3 \cup B_4$$

と表わせるから

$$P(A_i) = P(B_i \cup B_4) = P(B_i) + P(B_4) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \quad (i=1, 2, 3)$$

また，$A_1 A_2 = A_2 A_3 = A_3 A_1 = B_4$であることより

$$P(A_1A_2)=P(A_2A_3)=P(A_3A_1)=P(B_4)=\frac{1}{4}$$

よって

$$P(A_i)P(A_j)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}=P(A_iA_j)\qquad(i,j=1,\ 2,\ 3\ ;\ i\neq j)$$

が成り立つので，A_i と A_j（$i,j=1,\ 2,\ 3\ ;i\neq j$）の独立性が言えた。

(2)　$A_1A_2A_3=B_4$ であるから

$$P(A_1A_2A_3)=P(B_4)=\frac{1}{4}$$

一方

$$P(A_1)\ P(A_2)\ P(A_3)=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$$

であるので，A_1，A_2，A_3 は独立でない。

4.　長方形の辺上にランダムに 2 点甲，乙をとる場合の 2 点の位置は，次の 5 つの場合に分けられる。

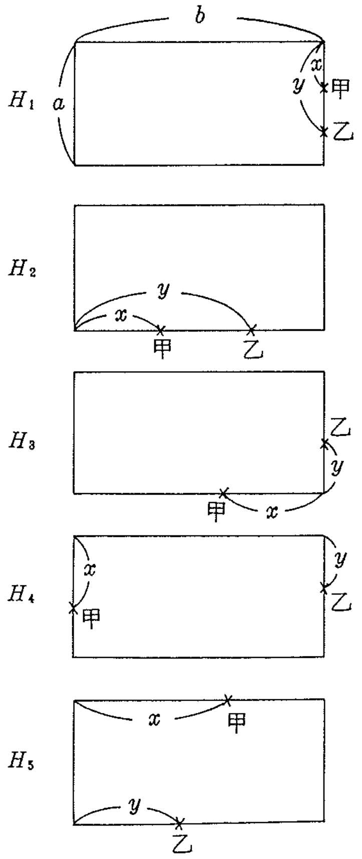
H_1：　2 点とも長さ a の 1 辺上にある場合

H_2：　2 点とも長さ b の 1 辺上にある場合

H_3：　2 点が相隣る 2 辺上にある場合

H_4：　2 点が相対する長さ a の辺上にある場合

H_5：　2 点が相対する長さ b の辺上にある場合



先ず，これらの場合の起る確率を求めると，

$$P(H_1)=2\times\frac{a}{2(a+b)}\times\frac{a}{2(a+b)}=\frac{a^2}{2(a+b)^2}$$

$$P(H_2)=2\times\frac{b}{2(a+b)}\times\frac{b}{2(a+b)}=\frac{b^2}{2(a+b)^2}$$

$$P(H_3)=2\times\frac{2a}{2(a+b)}\times\frac{2b}{2(a+b)}=\frac{2ab}{(a+b)^2}$$

$$P(H_4)=2\times\frac{a}{2(a+b)}\times\frac{a}{2(a+b)}=\frac{a^2}{2(a+b)^2}$$

$$P(H_5)=2\times\frac{b}{2(a+b)}\times\frac{b}{2(a+b)}=\frac{b^2}{2(a+b)^2}$$

である。

次に，2 点間の距離を Z で表わすと（図参照）

$$E(Z^2 \mid H_1) = \frac{1}{a^2}\int_0^a\int_0^a (x-y)^2\,dxdy = \frac{a^2}{6}$$

$$E(Z^2 \mid H_2) = \frac{1}{b^2}\int_0^b\int_0^b (x-y)^2\,dxdy = \frac{b^2}{6}$$

$$E(Z^2 \mid H_3) = \frac{1}{ab}\int_0^b\int_0^a (x^2+y^2)\,dxdy = \frac{a^2+b^2}{3}$$

$$E(Z^2 \mid H_4) = b^2 + \frac{1}{a^2}\int_0^a\int_0^a (x-y)^2\,dxdy = b^2 + \frac{a^2}{6}$$

$$E(Z^2 \mid H_5) = a^2 + \frac{1}{b^2}\int_0^b\int_0^b (x-y)^2\,dxdy = a^2 + \frac{b^2}{6}$$

となる。よって,

$$E(Z^2) = \sum_{i=1}^{5} P(H_i)\,E(Z^2 \mid H_i) = \frac{1}{6(a+b)^2}(a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4)$$

$$= \frac{(a+b)^2}{6}$$

5. (1) まず$P(A)$を求める。k番目の壺を選んだとして,その壺から赤ボールがn回続けて出る確率は$\left(\frac{k}{N}\right)^n$であり,$k$番目の壺を選ぶ確率は$\frac{1}{N+1}$であるから,

$$P(A) = \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^n$$

である。

次に$P(AB)$を考えると,これは$P(B)$,すなわち選んだ壺から赤ボールが$n+1$回続けて出る確率に他ならない。上と同様にして

$$P(AB) = P(B) = \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^{n+1}$$

従って

$$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^{n+1}}{\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^{n}} = \frac{\sum_{k=1}^{N} k^{n+1}}{N\sum_{k=1}^{N} k^n}$$

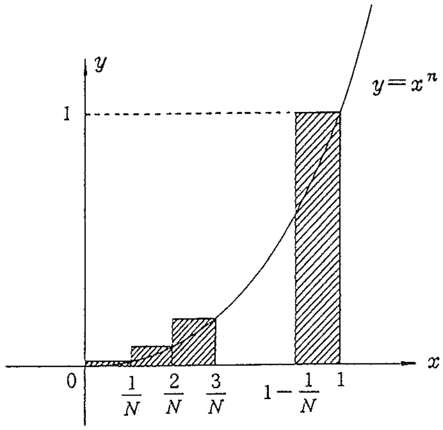
(2) $\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^n$を考えてみると,これは,$N$が大きくなるにつれて,グラフ$y=x^n$の$(0,1)$区間の積分値に近づく。(次図参照)

すなわち

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^n \sim \int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}$$

同様に

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^{n+1} \sim \int_0^1 x^{n+1}\,dx = \frac{1}{n+2}$$



従って，Nが大きいとき

$$P(B \mid A) = \frac{\dfrac{1}{N+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^{n+1}}{\dfrac{1}{N+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^{n}}$$

$$= \frac{\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^{n+1}}{\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^{n}}$$

$$\fallingdotseq \frac{\dfrac{1}{n+2}}{\dfrac{1}{n+1}} = \frac{n+1}{n+2}$$

となる。