昭和56年度（問　題）

1. 定常人口において $l_x=a-x$,　$(0\leqq x\leqq a)$,　$\mathring{e}_0=60$ のとき，この人口の平均年齢を求めよ。

2. 予定死亡率 $\{q_x\}$, $\{q'_x\}$ に $x\leqq h$ のとき $q_x=q'_x$, $x>h$ のとき $q_x>q'_x$ なる関係があるとき，
$_tV_y>{}_tV'_y$　となることを証明せよ。ここに $t=h-y>0$ とする。

3. $\int_0^\infty\int_h^\infty \frac{v^t-v^h}{\log v}\cdot {}_tp_x\cdot\mu_{x+t}\cdot {}_hp_y\cdot\mu_{y+h}\,dt\,dh=\int_0^\infty v^t\cdot {}_tp_x(1-{}_tp_y)dt$ を証明せよ。この場合，両辺の積分は同一の給付を表わしていると考えられるが，その給付の内容を言葉で説明せよ。

4. ある二重脱退残存表で

$$\mu^{(1)}_{x+t}=j,\qquad \mu^{(2)}_{x+t}=k,\qquad 0\leqq t\leqq 1$$

である。ここに j, k は定数とする。

$q^{(1)}_x$ の値を求めよ。

5. 毎年 x 歳で L 人が保険金額1の終身保険を契約し，定常状態に至ったときの責任準備金総額は $\frac{L}{\delta}(1-\bar{P}_x\mathring{e}_x)$　となることを証明せよ。ここに保険金は死亡時即時払，保険料は連続払とし，付加保険料は考慮しないものとする。

昭和56年度（解答例）

1.　求める平均年令を $\overline{X}$ とすると

$$\overline{X}=\frac{\int_0^a \ell_y\, y\,dy}{\int_0^a \ell_y\,dy}$$

$$=\frac{\int_0^a (a-y)\,y\,dy}{\int_0^a (a-y)\,dy}$$

$$=\frac{\left[\frac{1}{2}ay^2-\frac{1}{3}y^3\right]_o^a}{\left[ay-\frac{1}{2}y^2\right]_o^a}$$

$$=\frac{\frac{1}{6}a^3}{\frac{1}{2}a^2}$$

$$=\frac{1}{3}a$$

一方

$$\overset{o}{e}_o=\frac{\int_0^a \ell_y\,dy}{\ell_o}$$

ここで $\overline{X}$ を求める計算の分母に注意すれば

$$\overset{o}{e}_o=\frac{\frac{1}{2}a^2}{a}$$

$$=\frac{1}{2}a$$

条件により $\overset{o}{e}_o=60$ なので $60=\frac{1}{2}a$ より $a=120$

これより

$$\overline{X}=\frac{1}{3}\times 120$$

$$=40$$

2.　${}_tV_y > {}_tV_y'$ を証明するには

${}_tV_y - {}_tV_y' > 0$　を証明すればよいが

$${}_tV_y = 1-\frac{\ddot{a}_{y+t}}{\ddot{a}_y}$$

$$ {}_tV_y' = 1 - \frac{\ddot{a}_{y+t}'}{\ddot{a}_y'} $$

なので

$$ {}_tV_y - {}_tV_y' = \left(1 - \frac{\ddot{a}_{y+t}}{\ddot{a}_y}\right) - \left(1 - \frac{\ddot{a}_{y+t}'}{\ddot{a}_y'}\right) $$

$$ = \frac{\ddot{a}_{y+t}'}{\ddot{a}_y'} - \frac{\ddot{a}_{y+t}}{\ddot{a}_y} $$

$$ = \frac{\ddot{a}_y \cdot \ddot{a}_{y+t}' - \ddot{a}_y' \cdot \ddot{a}_{y+t}}{\ddot{a}_y \cdot \ddot{a}_y'} $$

と変形すれば

$$ \ddot{a}_y \cdot \ddot{a}_{y+t}' - \ddot{a}_y' \cdot \ddot{a}_{y+t} > 0 $$

を証明すればよいことになる。

ここで

$$ \ddot{a}_y = \ddot{a}_{y:\overline{t}|} + v^t \cdot {}_tp_y \cdot \ddot{a}_{y+t} $$

$$ \ddot{a}_y' = \ddot{a}_{y:\overline{t}|}' + v^t \cdot {}_tp_y' \cdot \ddot{a}_{y+t}' $$

$$ = \ddot{a}_{y:\overline{t}|} + v^t \cdot {}_tp_y \cdot \ddot{a}_{y+t}' $$

よって

$$ \ddot{a}_y \cdot \ddot{a}_{y+t}' - \ddot{a}_y' \cdot \ddot{a}_{y+t} $$

$$ = (\ddot{a}_{y:\overline{t}|} + v^t \cdot {}_tp_y \cdot \ddot{a}_{y+t}) \cdot \ddot{a}_{y+t}' - (\ddot{a}_{y:\overline{t}|} + v^t \cdot {}_tp_y \cdot \ddot{a}_{y+t}') \cdot \ddot{a}_{y+t} $$

$$ = \ddot{a}_{y:\overline{t}|} (\ddot{a}_{y+t}' - \ddot{a}_{y+t}) $$

結局，${}_tV_y > {}_tV_y'$ を証明するには

$\ddot{a}_{y+t}' - \ddot{a}_{y+t} > 0$　を証明すればよい。

$$ \ddot{a}_{y+t}' - \ddot{a}_{y+t} $$

$$ = (1 + v p_{y+t}' + v^e p_{y+t}' p_{y+t+1}' + \cdots) - (1 + v p_{y+t} + v^2 p_{y+t} p_{y+t+1} + \cdots) $$

$$ = v(p_{y+t}' - p_{y+t}) + v^2 (p_{y+t}' p_{y+t+1}' - p_{y+t} p_{y+t+1}) + \cdots $$

与えられた条件より，$p_{y+t+k}' > p_{y+t+k}$，　$k = 1, 2, 3, \cdots\cdots$

なので

$$ \ddot{a}_{y+t}' - \ddot{a}_{y+t} > 0 $$

即ち

${}_tV_y > {}_tV_y'$　が証明された。

3.　与式の左辺$=\int_0^{\infty} {}_kp_y \cdot \mu_{y+k} \{ \int_k^{\infty} ({}_tp_x \cdot \mu_{x+t}) \cdot \frac{v^t - v^k}{\log v} dt \} dk$

今，　$\frac{d}{dt}(\frac{v^t - v^k}{\log v}) = v^t$

$$\int {}_tp_x \mu_{x+t} dt = -{}_tp_x$$

なので，部分積分法によって

$$\text{与式の左辺} = \int_0^{\infty} {}_kp_y \cdot \mu_{y+k} \{ [\frac{v^t - v^k}{\log v} \cdot (-{}_tp_x)]_k^{\infty} + \int_k^{\infty} v^t {}_tp_x dt \} dk$$

$$= \int_0^{\infty} {}_kp_y \cdot \mu_{y+k} (\int_k^{\infty} v^t \cdot {}_tp_x dt) dk$$

$$= \int_0^{\infty} v^t \cdot {}_tp_x (\int_0^t {}_kp_y \cdot \mu_{y+k} dk) dt \qquad \text{（積分順序の交換）}$$

$$= \int_0^{\infty} v^t \cdot {}_tp_x \cdot (1 - {}_tp_y) dt$$

$=$与式の右辺

つぎに，給付の内容についてであるが，この算式は，(y)の死亡後(x)の生存中支払われる連続払復帰年金の現価$\bar{a}_{y|x}$を表わしている。

4.　$q_x^{(1)} = \int_0^1 {}_tp_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(1)} dt$　であるが，まず ${}_tp_x^{(\tau)}$ を求める。

$${}_tp_x^{(\tau)} = \frac{\ell_{x+t}^{(\tau)}}{\ell_x^{(\tau)}}$$

$$= (\ell_0^{(\tau)} e^{-\int_0^{x+t} \mu_y^{(\tau)} dy}) / (\ell_0^{(\tau)} e^{-\int_0^x \mu_y^{(\tau)} dy})$$

$$= e^{-\int_0^t \mu_{x+\tau}^{(\tau)} d\tau}$$

また　$\mu_{x+\tau}^{(\tau)} = \mu_{x+\tau}^{(1)} + \mu_{x+\tau}^{(2)}$

$= j + k$　　なので

$${}_tp_x^{(\tau)} = e^{-\int_0^t (j+k) d\tau}$$

$$= e^{-(j+k)t}$$

$$\therefore \ q_x^{(1)} = \int_0^1 e^{-(j+k)t} \cdot j\, dt$$

$$= \left[\frac{e^{-(j+k)t}}{-(j+k)} \cdot j \right]_0^1$$

$$= \frac{j}{j+k} \{ 1 - e^{-(j+k)} \}$$

5.　（解　その1）

定常状態において，つぎの関係式が成り立つ。

保険料総額 $+ \delta \times$ 責任準備金総額＝保険金総額

$$\text{保険料総額} = L \times \overline{P}_x \times \frac{T_x}{\ell_x}$$

$$= L \times \overline{P}_x \times \mathring{e}_x$$

$$\text{保険金総額} = L \times \frac{\sum_{t=0}^{\infty} d_{x+t}}{\ell_x}$$

$$= L$$

なので，責任準備金総額を F として，上式に代入すると

$$L \times \overline{P}_x \times \mathring{e}_x + \delta F = L$$

$$\therefore \ F = \frac{L}{\delta} (1 - \overline{P}_x \cdot \mathring{e}_x)$$

（解　その2）

定常状態における責任準備金総額を F とすれば

$$F = \int_0^{\infty} L \cdot {}_t\overline{V}_x \cdot \frac{\ell_{x+t}}{\ell_x} \, dt$$

$$= L \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{\overline{a}_{x+t}}{\overline{a}_x} \right) \frac{\ell_{x+t}}{\ell_x} dt$$

$$= L \int_0^{\infty} \{ 1 - (\overline{P}_x + \delta) \overline{a}_{x+t} \} \frac{\ell_{x+t}}{\ell_x} dt$$

$$= L \left\{ \mathring{e}_x - (\overline{P}_x + \delta) \int_0^{\infty} {}_tp_x \overline{a}_{x+t} \, dt \right\}$$

まず　$\int_0^{\infty} {}_tp_x \overline{a}_{x+t} \, dt$　を計算する。

$$\int_0^{\infty} {}_tp_x \overline{a}_{x+t} \, dt = \int_0^{\infty} (1+i)^t \, {}_{t|}\overline{a}_x \, dt$$

$$= \int_0^{\infty} (1+i)^t \left(\int_t^{\infty} v^r \, {}_rp_x \, dr \right) dt$$

$$= \int_0^\infty v^r {}_rp_x \left\{ \int_0^r (1+i)^t dt \right\} dr$$

$$= \int_0^\infty v^r {}_rp_x \overline{S}_{\overline{r|}} dr$$

$$= \int_0^\infty v^r {}_rp_x \frac{(1+i)^r - 1}{\delta} dr$$

$$= \int_0^\infty {}_rp_x \frac{1 - v^r}{\delta} dr$$

$$= \frac{1}{\delta} (\mathring{e}_x - \overline{a}_x)$$

$$\therefore \quad F = L\left\{ \mathring{e}_x - (\overline{P}_x + \delta) \frac{1}{\delta} (\mathring{e}_x - \overline{a}_x) \right\}$$

$$= \frac{L}{\delta} (\delta \mathring{e}_x - \overline{P}_x \mathring{e}_x + \overline{P}_x \overline{a}_x - \delta \mathring{e}_x + \delta \overline{a}_x)$$

$$= \frac{L}{\delta} \left\{ (\overline{P}_x + \delta) \overline{a}_x - \overline{P}_x \mathring{e}_x \right\}$$

$$= \frac{L}{\delta} (1 - \overline{P}_x \mathring{e}_x)$$