昭和56年度（問　題）

1. ゴンパーツの法則に従う２つの生命表があり，すべての年齢において，第１の生命表の死力は，第２の生命表の死力の２倍に等しい。このとき，ある定数 a に関し，第１の生命表において，(x) が n 年間生存する確率は，第２の生命表において，$(x+a)$ が n 年間生存する確率に等しくできる。この a を求めよ。

2. 利率 i による期末払終身年金現価を a_x^i ，期末払逓増終身年金現価を $(Ia)_x^i$ で表わす。
   j が i に十分近ければ，つぎの近似式が成り立つことを示せ。

$$a_x^j \fallingdotseq a_x^i - \frac{j-i}{1+i}(Ia)_x^i$$

3. $\sum_{t=1}^{n}(v^t - P_{x:\overline{n|}}\ddot{a}_{\overline{t|}})_{t-1}p_x \cdot q_{x+t-1} + (v^n - P_{x:\overline{n|}}\ddot{a}_{\overline{n|}})_n p_x = 0$ を証明せよ。

4. 死亡時には保険金１とその保険年度末の責任準備金の合計額を支払い，満期時には保険金１を支払う保険を考えた。
   保険金は年末払，責任準備金は平準純保険料式，保険期間は n ，加入年齢は x とする。
   この保険の年払平準純保険料（全期払）を求めよ。

5. つぎの２式を証明せよ。

(1) $$P_x^{(m)} \fallingdotseq \frac{P_x}{1 - \dfrac{m-1}{2m}(P_x + d)}$$

(2) $${}_tV_x^{(m)} \fallingdotseq {}_tV_x\left(1 + \frac{m-1}{2m}P_x^{(m)}\right)$$

昭和56年度（解答例）

1. 題意により，第2の生命表に対して，ゴンパーツの法則

$$(1) \qquad {}^{(\mathrm{II})}\mu_x = B c^x \qquad (c \fallingdotseq 1)$$

が成り立ち

第1の生命表に対して

$$(2) \qquad {}^{(\mathrm{I})}\mu_x = 2 B c^x$$

が成り立つ。

(1)より

$$(3) \qquad {}^{(\mathrm{II})}_{\ n}p_{x+a} = {}^{(\mathrm{II})}g^{\,c^{x+a}(c^n-1)}$$

$$\text{ここに} \quad \log {}^{(\mathrm{II})}g = \frac{-B}{\log c}$$

(2)より

$$(4) \qquad {}^{(\mathrm{I})}_{\ n}p_x = {}^{(\mathrm{I})}g^{\,c^x(c^n-1)}$$

$$\text{ここに} \quad \log {}^{(\mathrm{I})}g = \frac{-2B}{\log c}$$

題意により，(3)，(4) から

$$c^{x+a}(c^n-1)\frac{-B}{\log c} = c^x(c^n-1)\frac{-2B}{\log c}$$

が成り立つ a が，求めるものである。

すなわち

$$c^a = 2$$

$$\therefore \quad a = \frac{\log 2}{\log c}$$

2. $$a_x = \sum_{t=1}^{\omega-x} v^t {}_tp_x$$

$$\frac{d}{di}a_x = \frac{d}{di}\left\{\sum_{t=1}^{\omega-x} v^t {}_tp_x\right\}$$

$$= \frac{d}{di}\left\{\sum_{t=1}^{\omega-x}(1+i)^{-t} {}_tp_x\right\}$$

$$= \sum_{t=1}^{\omega-x} \left\{ -t\,(1+i)^{-t-1}\,{}_tp_x \right\}$$

$$= -v \sum_{t=1}^{\omega-x} t\,v^t\,{}_tp_x$$

すなわち　$\dfrac{d}{di}\,a_x = -v\,(Ia)_x$

この式から　$\varDelta a_x \fallingdotseq -v\,(Ia)_x \cdot \varDelta i$

従って，j が i に十分近ければ

$$\begin{aligned} a_x^j &\fallingdotseq a_x^i + \varDelta a_x \\ &= a_x^i - (j-i)\,v\,(Ia)_x^i \end{aligned}$$

すなわち　$a_x^j \fallingdotseq a_x^i - \dfrac{j-i}{1+i}\,(Ia)_x^i$

3.
$$A = \sum_{t=1}^{n} v^t\,{}_{t-1}p_x \cdot q_{x+t-1} + v^n \cdot {}_np_x$$

$$B = \sum_{t=1}^{n} \ddot{a}_{\overline{t}|}\,{}_{t-1}p_x \cdot q_{x+t-1} + \ddot{a}_{\overline{n}|} \cdot {}_np_x$$

とおくと，与えられた式の左辺は

$$A - P_{x:\overline{n}|} \cdot B$$

で表わされる。

ここで，Aはさらに

$$\begin{aligned} A &= A^1_{x:\overline{n}|} + {}_nE_x \\ &= A_{x:\overline{n}|} \end{aligned}$$

と変形される。

一方

$$B = \sum_{t=1}^{n} \left(\sum_{\tau=1}^{t} v^{\tau-1} \right) \frac{d_{x+t-1}}{\ell_x} + \left(\sum_{\tau=1}^{n} v^{\tau-1} \right) \frac{\ell_{x+n}}{\ell_x}$$

$$= \frac{1}{\ell_x} \left\{ \sum_{\tau=1}^{n} v^{\tau-1} \left(\sum_{t=\tau}^{n} d_{x+t-1} \right) + \sum_{\tau=1}^{n} v^{\tau-1}\,\ell_{x+n} \right\}$$

上式の括弧｛　｝内の和を，つぎのように考えてみる。

$$
\begin{array}{ll}
\text{第}\,1\,\text{項}\left\{\begin{array}{ll}
\tau=1 & d_x \\
\tau=2 & d_{x+1} + v d_{x+1} \\
\tau=3 & d_{x+2} + v d_{x+2} + v^2 d_{x+2} \\
\vdots & \\
\tau=n & d_{x+n-1} + v d_{x+n-1} + v^2 d_{x+n-1} + \cdots\cdots + v^{n-1} d_{x+n-1}
\end{array}\right. & \\
\text{第 2 項} & \ell_{x+n} + v\ell_{x+n} + v^2\ell_{x+n} + \cdots\cdots\cdots\cdots + v^{n-1}\ell_{x+n} \\
\hline
\text{Total} & \ell_x + v\ell_{x+1} + v^2\ell_{x+2} + \quad \cdots\cdots\cdots\cdots + v^{n-1}\ell_{x+n-1}
\end{array}
$$

これから

$$
\begin{aligned}
B &= \frac{1}{\ell_x}\left\{\sum_{\tau=1}^{n} v^{\tau-1}\left(\sum_{t=\tau}^{n} d_{x+t-1} + \ell_{x+n-1}\right)\right\} \\
&= \sum_{\tau=1}^{n} v^{\tau-1}\ \frac{\ell_{x+\tau-1}}{\ell_x} \\
&= \ddot{a}_{x:\overline{n|}}
\end{aligned}
$$

以上により

$$
\begin{aligned}
\text{与式の左辺} &= A - P_{x:\overline{n|}}\cdot B \\
&= A_{x:\overline{n|}} - P_{x:\overline{n|}}\cdot \ddot{a}_{x:\overline{n|}} \\
&= 0 \\
&= \text{与式の右辺}
\end{aligned}
$$

4. 保険料P，責任準備金 ${}_tV$，${}_{t+1}V$に関し

$$(P + {}_tV)(1+i) = q_{x+t}(1+{}_{t+1}V) + p_{x+t}\cdot {}_{t+1}V$$

が成り立つが，これは

$$P(1+i) = \left\{ {}_{t+1}V - (1+i)\,{}_tV \right\} + q_{x+t}$$

とかける。

この両辺に $(1+i)^{n-t-1}$ をかけて，$t=0$ から $t=n-1$ まで，辺々加えると

$$P\ddot{S}_{\overline{n|}} = \left\{ {}_nV - {}_0V(1+i)^n \right\} + \sum_{t=0}^{n-1} q_{x+t}(1+i)^{n-t-1}$$

をうる。

ここで，${}_0V=0$，${}_nV=1$ に注意すると

$$P\ddot{s}_{\overline{n}|} = 1 + \sum_{t=0}^{n-1} q_{x+t}\ (1+i)^{n-t-1}$$

$$\therefore\quad P = \frac{1 + \sum_{t=0}^{n-1} q_{x+t}\ (1+i)^{n-t-1}}{\ddot{s}_{\overline{n}|}}$$

または

$$P = \frac{v^n + \sum_{t=0}^{n-1} q_{x+t}\ v^{t+1}}{\ddot{a}_{\overline{n}|}}$$

5. (1) まず

$$\ddot{a}_x^{(m)} \fallingdotseq \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}$$

に注意する。

$$P_x^{(m)} = \frac{A_x}{\ddot{a}_x^{(m)}}$$

$$= \left(\frac{A_x}{\ddot{a}_x}\right) \Big/ \left(\frac{\ddot{a}_x^{(m)}}{\ddot{a}_x}\right)$$

$$\fallingdotseq \frac{P_x}{1 - \frac{m-1}{2m} \cdot \frac{1}{\ddot{a}_x}}$$

ここで，$\frac{1}{\ddot{a}_x} = P_x + d$ に注意すれば，与式をうる。

(2) $${}_tV_x^{(m)} = A_{x+t} - P_x^{(m)} \cdot \ddot{a}_{x+t}^{(m)}$$

(1)で注意したように，$\ddot{a}_{x+t}^{(m)} \fallingdotseq \ddot{a}_{x+t} - \frac{m-1}{2m}$ なので，これを上式に代入すると，

$${}_tV_x^{(m)} \fallingdotseq A_{x+t} - P_x^{(m)}\left(\ddot{a}_{x+t} - \frac{m-1}{2m}\right)$$

$${}_tV_x^{(m)} \fallingdotseq A_{x+t} - P_x^{(m)} \cdot \ddot{a}_{x+t} + P_x^{(m)} \cdot \frac{m-1}{2m}$$

また，(1)から $P_x^{(m)} \fallingdotseq P_x + \frac{m-1}{2m} \cdot P_x^{(m)} \cdot (P_x + d)$

これを上式の右辺の第2項に代入すると

$$ {}_tV_x^{(m)} \fallingdotseq A_{x+t} - \left\{ P_x + \frac{m-1}{2m} \cdot P_x^{(m)} \cdot (P_x + d) \right\} \ddot{a}_{x+t} + P_x^{(m)} \cdot \frac{m-1}{2m} $$

$$ = (A_{x+t} - P_x \cdot \ddot{a}_{x+t}) + P_x^{(m)} \cdot \frac{m-1}{2m} \cdot \left\{ 1 - (P_x + d) \cdot \ddot{a}_{x+t} \right\} $$

ここで， $A_{x+t} = 1 - d \cdot \ddot{a}_{x+t}$ に注意すると

$$ {}_tV_x^{(m)} \fallingdotseq (A_{x+t} - P_x \cdot \ddot{a}_{x+t}) + P_x^{(m)} \cdot \frac{m-1}{2m} \cdot (A_{x+t} - P_x \cdot \ddot{a}_{x+t}) $$

$$ = (A_{x+t} - P_x \cdot \ddot{a}_{x+t}) \cdot \left(1 + P_x^{(m)} \cdot \frac{m-1}{2m} \right) $$

$$ = {}_tV_x \cdot \left(1 + P_x^{(m)} \cdot \frac{m-1}{2m} \right) $$