昭和55年度（問　題）

1. 次々に2つに分割される粒子がある。n 回目の分割において，分割後の粒子（2つのうち一方をランダムに選ぶ）の質量の分割前の粒子の質量に対する比を X_n とする。X_1, X_2, …が独立で，各 X_k はいずれも$(0, 1)$上の一様分布$U(0, 1)$に従うとき，最初（第1回の分割前）の粒子の質量を1として，n 回分割後の粒子の質量 $Y_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$ の密度関数 f_n を次の手順によって求めよ。

(1) $Z_k = \log(1/X_k)$の密度関数 g_k を求めよ。（ここで，logは自然対数とする。）

(2) $S_n = \sum_{k=1}^{n} Z_k$ の密度関数 h_nは，$h_n(x) = \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-x} (x > 0)$, $0\ (x \leqq 0)$で与えられることを示せ。

(3) f_n を求めよ。

2. 仮説$H_0 : \mu = \mu_0$を検定するとき，真の平均値がμ_0より 0.2σ以上離れたときに，これを検出できる確率が95％以上であるようにするには標本の大きさをいくつにすればよいか。ただし，標準偏差 σ は既知とし，有意水準 ε は5％とする。また，$u(0.025) = 1.96$, $u(0.05) = 1.65$ である。

3. あるカードケースに入っているカードは，1番からN番までの通し番号が付けられているが，並び方は番号順になっていない。ある日，第三者がカードケースにあるカードの枚数を推定するため，ランダムに50枚のカードを抽出してそのカード番号の和を求めたら220×10^3であった。その人が何枚と推定したとき，その誤差は5％以内といえるか。$u(0.025) = 1.96$, $u(0.05) = 1.65$ である。

4. $\{X_j ; j = 1, 2, \cdots\}$ は共通な確率分布 $P(X = i) = p_i\ (i = 0, 1, 2, \cdots)$ および確率母関数 $G_X(z)$をもつ独立な離散確率変数とする。また，N は全てのX_jと独立な離散確率変数であり，確率分布 $P(N = n) = \phi_n\ (n = 1, 2, \cdots)$ および確率母関数 $G_N(z)$ をもつものとする。このとき，$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$の平均値$E(Y)$を求めよ。

（確率変数Xの確率分布を $P(X = i) = p_i,\ (i = 0, 1, 2, \cdots)$；とするとき，$G_X(z) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i z^i = E(z^X)$ $(|z| \leqq 1)$ をXの確率母関数という。）

5. ある会社で先月にクレーム対策の手を打ち，その効果を見るために今月に入ってから30日間，毎日のクレーム受付件数を調べたところ，下表のような結果を得たという。クレーム対策の効果が現れているか否かを有意水準1％で検定せよ。ただし，過去半年間の1日のクレーム受付件数を集計して，1日の受付件数は平均値0.69のPoisson分布に従っていることが分っている。また，$\chi^2_{22}(0.01) = 40.3$, $\chi^2_{21}(0.01) = 38.9$, $\chi^2_{20}(0.01) = 37.6$, $\chi^2_{22}(0.005) = 42.8$, $\chi^2_{21}(0.005) = 41.4$, $\chi^2_{20}(0.005) = 40.0$ とする。

受付件数	0件	1	2	3	4件以上
日　数	23日	5	1	1	0

昭和55年度（解答例）

1. (1) X_k は $U(0,1)$ に従うから，$x>0$ で

$$P(Z_k \leqq x) = P(X_k \geqq e^{-x}) = 1-e^{-x}$$

であり，$x \leqq 0$ では明らかに

$$P(Z_k \leqq x) = 0$$

である。よって密度関数 g_k は

$$g_k(x) = \begin{cases} e^{-x} & (x>0) \\ 0 & (x \leqq 0) \end{cases}$$

(2) 数学的帰納法による。

$n=1$ の場合は

$$h_1(x) = g_1(x) = \begin{cases} e^{-x} & (x>0) \\ 0 & (x \leqq 0) \end{cases}$$

で成立している。

$n=k$ で証明すべき式が成り立っているとして $n=k+1$ でも成り立つことを示す。

$$h_{k+1}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(x-t)h_k(t)\,dt$$

$$= \int_0^x h_1(x-t)h_k(t)\,dt$$

$$= \int_0^x e^{-(x-t)}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{-t}\,dt \qquad (\because\ n=k\ で成立)$$

$$= \frac{e^{-x}}{(k-1)!}\int_0^x t^{k-1}\,dt = \frac{x^k}{k!}e^{-x}$$

よって示された。

(3) $X_k = e^{-Z_k}$ であるから $Y_n = \prod_{k=1}^{n} X_k = e^{-\sum_{k=1}^{n} Z_k} = e^{-S_n}$

そこで，S_n の分布関数を H_n とすると，$0<x<1$ で

$$P(Y_n \leqq x) = P(S_n \geqq -\log x) = 1-P(S_n < -\log x)$$

$$= 1-H_n(-\log x)$$

$$\therefore \quad f_n(x) = h_n\left(-\log x\right) \cdot \frac{1}{x} = \frac{(-\log x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{\log x} \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\left(\log \frac{1}{x}\right)^{n-1}$$

2. 標本の大きさをn，標本平均を$\overline{x}$，標本変量平均を$\overline{X}$とする。

H_0を検定するとき，$\overline{x} > \mu_0+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ または $\overline{x} < \mu_0-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ であれば棄却，$\mu_0-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \overline{x} < \mu_0+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ならば採択する。ここで，真の平均を $\mu_0+0.2\sigma$ とすると，$\overline{x}$をとったとき$\mu_0-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \overline{x} < \mu_0+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$となる確率が5％以下になればよい。（真の平均が $\mu_0+0.2\sigma$ より大きければ $\mu_0-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \overline{x} < \mu_0+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ となる確率は明らかに5％以下になる。）すなわち

$$P(\mu_0-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \overline{X} < \mu_0+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 0.05$$

なるnを求める。ところで，$\overline{X}$は $N(\mu_0+0.2\sigma, \frac{\sigma^2}{n})$ に従うから

$$P(-0.2\sqrt{n}-1.96 < \frac{\overline{X}-(\mu_0+0.2\sigma)}{\sigma/\sqrt{n}} < -0.2\sqrt{n}+1.96) = 0.05$$

より，$\frac{\overline{X}-(\mu_0+0.2\sigma)}{\sigma/\sqrt{n}}$ が $-0.2\sqrt{n}+1.96$ 以下となる確率が5％以下となればよい。

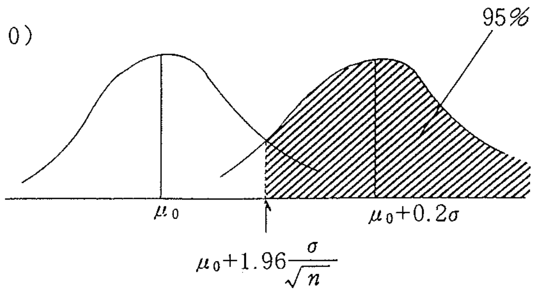
（$\because$ $-0.2\sqrt{n}-1.96$以下の確率は$\fallingdotseq 0$）

$\therefore \ -0.2\sqrt{n}+1.96 = -1.65$

$\therefore \ n \fallingdotseq 325.8$

また，逆に真の平均が $\mu_0-0.2\sigma$ としても同じnが得られる。

よって，326個以上とすればよい。



3. カード番号の真の平均値μは $\mu = \frac{N+1}{2}$ である。

また，標本の大きさnの標本変量平均を$\overline{X}$としたとき，

$$P(\overline{X}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\times\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} < \mu < \overline{X}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\times\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}) = 0.95$$

となる。ここで $\sigma^2=\dfrac{N^2-1}{12}$ である。

ところで，ランダムに抽出された50枚のカードの平均$\overline{x}$は

$$\overline{x}=\frac{220\times 10^3}{50}=4400$$

であったから，Nの近似値として$\hat{N}=8799$を得る。

$N\gg n$であるから$\sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}}\fallingdotseq 1$ とし，σ^2 を $\dfrac{\hat{N}^2-1}{12}$ で近似すると

$$4400-1.96\times\frac{1}{\sqrt{50}}\times\sqrt{\frac{8799^2-1}{12}}<\frac{N+1}{2}$$
$$<4400+1.96\times\frac{1}{\sqrt{50}}\times\sqrt{\frac{8799^2-1}{12}}$$

より

$$7390.8<N<10207.1$$

を得る。よって，この範囲の枚数と推定すれば誤差は５％以内である。

4. $P(Y=i)=q_i \quad (i=0,1,2,\cdots)$ とおくと

$$q_i=P(Y=i)=\sum_n P(Y=i,\ N=n)$$

$$=\sum_n P(X_1+X_2+\cdots+X_n=i,\ N=n)$$

$$=\sum_n P(X_1+X_2+\cdots+X_n=i)\,P(N=n) \qquad \left(\because\ \begin{array}{c}N\text{と}\{X_j\}\\ \text{は独立}\end{array}\right)$$

である。よって

$$G_Y(z)=\sum_i q_i z^i=\sum_i\{\sum_n P(X_1+X_2+\cdots+X_n=i)P(N=n)\}z^i$$

$$=\sum_n\{\sum_i P(X_1+X_2+\cdots+X_n=i)z^i\}\,P(N=n)$$

$$=\sum_n\{E(z^{X_1+X_2+\cdots+X_n})\}\,P(N=n)$$

$$=\sum_n\{E(z^{X_1})\cdot E(z^{X_2})\cdots\cdots E(z^{X_n})\}\,P(N=n) \qquad \left(\because\ \begin{array}{c}X_1,X_2,\cdots,X_n\\ \text{は独立}\end{array}\right)$$

$$=\sum_n\{G_X(z)\}^n P(N=n)=G_N(G_X(z))$$

$\therefore\ G'_Y(z) = G'_N(G_X(z))G'_X(z)$

ところで，一般に $G_X(1) = 1, G'_X(1) = E(X)$ であるから

$$E(Y) = G'_Y(1) = G'_N(G_X(1))G'_X(1)$$
$$= G'_N(1)G'_X(1)$$
$$= E(N)E(X)$$

5. 1日当りのクレーム発生件数 X_i は，対策前には平均値 λ_0（$\lambda_0 = 0.69$）のPoisson分布に従い，現在は平均値 λ のPoisson分布に従うとする。そこで，帰無仮説 H_0 : $\lambda = \lambda_0$ を対立仮説 H_1 : $\lambda < \lambda_0$ に対し検定する。

ところで，今月の30日間の総発生件数 $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ ($n=30$)は平均 $n\lambda$ のPoisson分布に従うから

$$P(S \leqq k | \lambda = \lambda_0) = \sum_{i=0}^{k} \frac{(n\lambda_0)^i e^{-n\lambda_0}}{i!} \leqq \varepsilon$$

であれば H_0 を棄却し，H_1 を採択する。ここで，Poisson分布と χ^2－分布の関係から

$$\sum_{i=0}^{k} \frac{(n\lambda_0)^i e^{-n\lambda_0}}{i!} = P(\chi^2_{2(k+1)} \geqq 2n\lambda_0)$$

であるから，総発生件数 k から自由度 $\phi = 2(k+1)$ の χ^2－分布の上側 ε 点

$\chi^2_{2(k+1)}(\varepsilon)$ について

$$\chi^2_{2(k+1)}(\varepsilon) \leqq 2n\lambda_0$$

であれば H_0 を棄却すればよいことになる。

この問題の場合 $\phi = 2(10+1) = 22,\ \varepsilon = 0.01$ であるから

$$\chi^2_{22}(0.01) = 40.3 \leqq 2n\lambda_0 = 41.4$$

よって有意水準1％で H_0: $\lambda = 0.69$件／日は棄却され，クレーム対策の効果があったといえる。