昭和55年度（問　題）

1. X，Yを同一の指数分布（密度関数：$x \geqq 0$において$\alpha e^{-\alpha x}$，$x<0$において0，ただし，$\alpha>0$）に従う独立な確率変数とする。X，Yのうち小さい方をU，大きい方をV，その差$V-U$をWとするとき，

(1) U，Wはそれぞれどのような分布に従うか。

(2) UとWとは独立であることを示せ。

2. 信号0または1を送る通信チャンネルにおいて，雑音のために，0または1を送ったとき受信側で正しく0，1と受信される確率はそれぞれ0.95，0.90である。また，0が送られる割合は0.4であるという。事象A，Bをそれぞれ

$A=\{$送信信号が1である$\}$，$B=\{$受信信号が1である$\}$

とするとき，次の確率を求めよ。

(1) $P(B)$

(2) $P(A \mid B)$

3. 駐車料金ははじめの1時間はa円，それ以降は1時間増すごとにb円追加されるものとする（1時間未満は切上げ）。1台の駐車時間Xは平均値λの指数分布に従い，1日の来車台数Nは平均値μのPoisson分布に従うとき，同じ日に駐車を開始した車の駐車料金の合計Zの平均値を求めよ。ただし，駐車スペースは十分にあるものとする。

4. ある部屋にn人の学生がいる。少なくとも2人の生まれた月が同じである確率が$\frac{1}{2}$より大きくなるためにはnはいくら以上でなければならないか。

5. 自然数1，2，…，nから重複を許して任意にm個の数字を選び，その和をXとしたとき，$X=t$（$t=m$，$m+1$，…，nm）となる確率を求めよ。

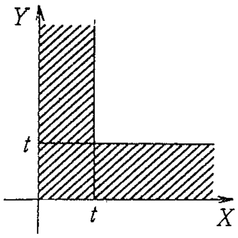
昭和55年度（解答例）

1.　X，Y の分布関数を $F(t)$ とおくと，$t \geqq 0$ のとき

$$F(t) = P\{X \leqq t\} = P\{Y \leqq t\} = \int_0^t \alpha e^{-\alpha x} dx = \Big[-e^{-\alpha x}\Big]_0^t = 1 - e^{-\alpha t}$$

(1)　U の分布関数を $U(t)$ とすると，$t \geqq 0$ のとき

$$U(t) = P\{min(X, Y) \leqq t\}$$



$$= \int_0^t F\{dx\} + \int_t^\infty F(t) F\{dx\}$$

$$= F(t) + F(t)(1 - F(t))$$

$$= F(t)(2 - F(t))$$

$$= (1 - e^{-\alpha t})(1 + e^{-\alpha t}) = 1 - e^{-2\alpha t}$$

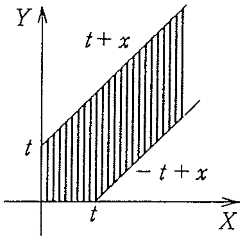
$$W = max(X, Y) - min(X, Y) = \begin{cases} X - Y & for \quad X \geqq Y \geqq 0 \\ Y - X & for \quad 0 \leqq X \leqq Y \end{cases}$$

$$= |X - Y| \quad (X \geqq 0,\ Y \geqq 0)$$

W の分布関数を $W(t)$ とすると，$t \geqq 0$ のとき

$$W(t) = P\{|X - Y| < t,\ X \geqq 0,\ Y \geqq 0\}$$

$$= \int_0^\infty F(t + x) F\{dx\} - \int_t^\infty F(-t + x) F\{dx\}$$



$$= \int_0^\infty (1 - e^{-\alpha(t+x)}) F\{dx\} - \int_t^\infty (1 - e^{-\alpha(-t+x)}) F\{dx\}$$

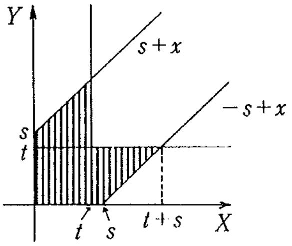
$$= 1 - \int_0^\infty e^{-\alpha(t+x)} \alpha e^{-\alpha x} dx - (1 - F(t))$$

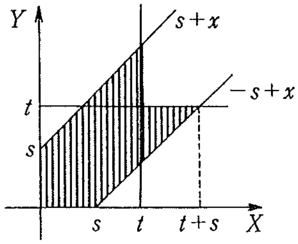
$$+ \int_t^\infty e^{-\alpha(-t+x)} \alpha e^{-\alpha x} dx$$

$$= F(t) - \int_0^\infty e^{-\alpha(t+x)} \alpha e^{-\alpha x} dx + \int_0^\infty e^{-\alpha y} \cdot \alpha e^{-\alpha(t+y)} dy$$

$$= F(t)$$

(2)　U，W の同時密度関数を $G(t, s)$ とおくと，





$$G(t,\ s)=\int_0^t F(s+x)F\{dx\}+\int_t^{t+s}F(t)F\{dx\}-\int_s^{t+s}F(-s+x)F\{dx\}$$

$$=\int_0^t(1-e^{-\alpha(s+x)})F\{dx\}+F(t)(F(t+s)-F(t))$$

$$-\int_s^{t+s}(1-e^{-\alpha(-s+x)})F\{dx\}$$

$$=F(t)-\int_0^t e^{-\alpha(s+x)}\alpha e^{-\alpha x}dx+F(t)(e^{-\alpha t}-e^{-\alpha(t+s)})$$

$$-(F(t+s)-F(s))+\int_s^{t+s}e^{-\alpha(-s+x)}\alpha e^{-\alpha x}dx$$

$$=F(t)-\int_0^t e^{\ \alpha(s+x)}\alpha e^{-\alpha x}dx+F(t)\cdot e^{-\alpha t}(1-e^{-\alpha s})$$

$$-(e^{-\alpha s}-e^{-\alpha(t+s)})+\int_0^t e^{-\alpha y}\alpha e^{-\alpha(s+y)}dy$$

$$=F(t)+F(t)\cdot(1-F(t))\cdot F(s)-e^{-\alpha s}(1-e^{-\alpha t})$$

$$=F(t)+F(t)\cdot(1-F(t))\cdot F(s)-(1-F(s))\cdot F(t)$$

$$=F(t)\{1+(1-F(t))\cdot F(s)-1+F(s)\}$$

$$=F(t)(2-F(t))\cdot F(s)=U(t)\cdot W(s)$$

（別解）X,Y の同時密度関数 $f(x,y)$ は，$\alpha^2e^{-\alpha(x+y)}\ (x,y>0)$ で，

U,W の同時分布関数を $G(u,w)$ とすると，

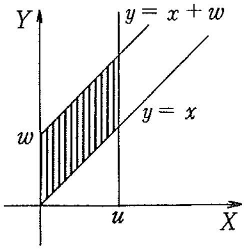
$$G(u,w)=P\{U<u,\ W<w\}$$

$$=P\{min(X,Y)<u,\ max(X,Y)-min(X,Y)<w\}$$

$$=P\{min(X,Y)<u,\ max(X,Y)-min(X,Y)<w,\ X<Y\}$$

$$+P\{min(X,Y)<u,\ max(X,Y)-min(X,Y)<w,\ X>Y\}$$

$$=P\{X<u,\ Y-X<w,\ X<Y\}+P\{Y<u,\ X-Y<w,\ X>Y\}$$



$$P\{X<u,\ Y-X<w,\ X<Y\}$$

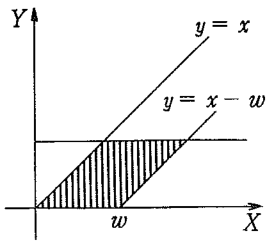
$$=\iint_{\substack{0<x<u\\0<y-x<w}} f(x,y)\,dx\,dy=\iint_{\substack{0<x<u\\0<y-x<w}} \alpha^2 e^{-\alpha(x+y)}\,dx\,dy \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$\xi=x,\quad \eta=y-x$ と変数変換すると

$x=\xi,\quad y=\xi+\eta,\quad x+y=2\xi+\eta$

$$J=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1$$ で

$$①=\iint_{\substack{0<\xi<u\\0<\eta<w}} \alpha^2 e^{-\alpha(2\xi+\eta)}\,d\xi\cdot d\eta$$



$$P\{Y<u,\ X-Y<w,\ X>Y\}$$

$$=\iint_{\substack{0<y<u\\0<x-y<w}} f(x,y)\,dxdy=\iint_{\substack{0<y<u\\0<x-y<w}} \alpha^2 e^{-\alpha(x+y)}\,dxdy \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

$\xi=y,\quad \eta=x-y$ と変数変換すると

$x=\xi+\eta,\quad y=\xi,\quad x+y=2\xi+\eta,\quad J=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1$ で

$$②=\iint_{\substack{0<\xi<u\\0<\eta<w}} \alpha^2 e^{-\alpha(2\xi+\eta)}\,d\xi d\eta$$

よって $G(u,w)=2\iint_{\substack{0<\xi<u\\0<\eta<w}} \alpha^2 e^{-\alpha(2\xi+\eta)}\,d\xi d\eta=\int_{0<\xi<u} 2\alpha e^{-2\alpha\xi}\,d\xi\cdot\int_{0<\eta<w} \alpha e^{-\alpha\eta}\,d\eta$

2. $A^c=\{$送信信号が 0 である$\}$, $B^c=\{$受信信号が 0 である$\}$ とする。

$P(A)=0.6,\quad P(A^c)=0.4$

$P(B\mid A)=0.90,\quad P(B^c\mid A)=0.10$

$P(B^c\mid A^c)=0.95,\quad P(B\mid A^c)=0.05$

(1) $P(B)=P(B\cap A)+P(B\cap A^c)$

$$=P(B\mid A)P(A)+P(B\mid A^c)P(A^c)$$

$$=0.90\times 0.6+0.05\times 0.4=0.54+0.02=0.56$$

(2) $P(A\mid B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{P(B\mid A)P(A)}{P(B)}=\dfrac{0.90\times 0.6}{0.56}=\dfrac{27}{28}\fallingdotseq 0.964$

3. 1台の駐車料金を $Y=\phi(X)$ とおくと

$$Y=\phi(X)=a+bk\ (k<X\leqq k+1\ ;\ k=0,1,2,\cdots\cdots)$$

$$E(Y)=E(\phi(X))=\int_0^\infty \phi(x)\cdot\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}dx=\sum_{k=0}^{\infty}\int_k^{k+1}(a+bk)\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}dx$$

$$=a+b\cdot\sum_{k=0}^{\infty}k\int_k^{k+1}\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}dx$$

$$=a+b\sum_{k=0}^{\infty}k\left[-e^{-\frac{x}{\lambda}}\right]_k^{k+1}=a+b\sum_{k=0}^{\infty}k\left(e^{-\frac{k}{\lambda}}-e^{-\frac{k+1}{\lambda}}\right)$$

$$=a+b\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\frac{k}{\lambda}}=a+be^{-\frac{1}{\lambda}}\cdot\left(1-e^{-\frac{1}{\lambda}}\right)^{-1}=a+\frac{b}{e^{\frac{1}{\lambda}}-1}$$

i 番目に駐車した車の料金を Y_i とすると, N は $Y_1, Y_2, \cdots\cdots\cdots$ と独立で,

$$Z=Y_1+Y_2+\cdots\cdots\cdots+Y_N$$

$$\therefore E(Z)=\sum_{n=0}^{\infty}P(N=n)E(Y_1+\cdots\cdots+Y_N\mid N=n)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}P(N=n)\cdot E(Y_1+\cdots\cdots+Y_n)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\mu}\frac{\mu^n}{n!}\cdot n\left(a+\frac{b}{e^{\frac{1}{\lambda}}-1}\right)=\mu\left(a+\frac{b}{e^{\frac{1}{\lambda}}-1}\right)$$

4. 学生をボール，誕生月を箱とみなし，ボールをランダムに n 個の箱の中へ入れてい

くことを考える。すでにボールの入っている箱に新しいボールが初めて入れられるまで，ランダムにボールを入れ続け，この過程は，箱にボールが初めて重複して入ったときに終る。

$(j_1, j_2, \cdots, j_r)$で1番目，2番目，…，r番目のボールが箱の番号$j_1, j_2, \cdots\cdots, j_r$に入れられ$r$回目に終了することを示すものとする。$j_i$は1から$n$までの整数で，$j_1, \cdots, j_{r-1}$は全て異なるが$j_r$はこれらのどれか1つに等しい。2番目のボールが入れられる前または$(n+1)$番目のボールが入れられた後は2個のボールが入った箱が1つだけあるということはないから，rは2，3，……，$n+1$という値しかとらない。一定数のボールをn個の箱の中に入れることより，ちょうどr個のボールを含む各標本点$(j_1, \cdots, j_r)$に確率n^{-r}を与えればよい。

固定されたrに対して全ての標本点$(j_1, \cdots, j_r)$はr回目にこの過程が終るという事象を示している。$j_1, \cdots, j_{r-1}$という数は$n \cdot (n-1) \cdots\cdots (n-r+2)$通りの異なった方法で選ばれ，$j_r$は，$r-1$個の数$j_1, \cdots, j_{r-1}$の中から選べる。

従ってr回目でこの過程の終る確率は

$$q_r = \frac{n \cdot (n-1) \cdots\cdots (n-r+2) \cdot (r-1)}{n^r}$$

で，$q_1 = 0$である。

題意は，$n = 12$（= 誕生月）の場合，$q_1 + q_2 + \cdots\cdots + q_r > \frac{1}{2}$なる$r$を求めることを要求している。

$$q_1 = 0$$

$$q_2 = \frac{12 \cdot 1}{12^2} = \frac{1}{12} = 0.083 \qquad q_1 + q_2 = 0.083$$

$$q_3 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 2}{12^3} = \frac{11}{12 \cdot 6} = 0.153 \qquad q_1 + q_2 + q_3 = 0.236$$

$$q_4 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 3}{12^4} = \frac{11 \cdot 5}{12 \cdot 6 \cdot 4} = 0.191 \qquad q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 0.427$$

$$q_5 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 4}{12^5} = \frac{11 \cdot 5}{12 \cdot 6 \cdot 4} = 0.191 \qquad q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 = 0.618 > \frac{1}{2}$$

より，5人以上であればよい。

（注）上記の過程がr回よりも多く続く確率p_rは，$1 - (q_1 + q_2 + \cdots + q_r)$で，

$$p_1 = 1$$

$$p_r = \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-r+1)}{n^r}$$

$$\left(\begin{aligned} &\because\ p_{r-1} = \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-r+2)}{n^{r-1}} \quad \text{とすると} \\ &p_r = p_{r-1} - q_r = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+2)}{n^{r-1}} - \frac{n(n-1)\cdots(n-r+2)(r-1)}{n^r} \\ &\qquad = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{n^r} \end{aligned}\right)$$

題意は $n = 12$ のとき，$1 - p_r > \frac{1}{2}$ ，従って$p_r < \frac{1}{2}$ となる r を求めることを要求している。

$$p_1 = 1 > \tfrac{1}{2}\,, \quad p_2 = \frac{12\cdot 11}{12^2} = \frac{11}{12} > \frac{1}{2}\,, \quad p_3 = \frac{12\cdot 11\cdot 10}{12^3} = \frac{11}{12}\cdot\frac{5}{6} > \frac{1}{2}$$

$$p_4 = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{12^4} = \frac{11}{12}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{9}{12} = \frac{11\cdot 5}{12\cdot 8} > \frac{1}{2}$$

$$p_5 = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{12^5} = \frac{11}{12}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{8}{12} = \frac{11\cdot 5}{12\cdot 12} < \frac{1}{2}$$

5. X_i を i 番目に選ばれた数とすると，

$$P\{Xi = j\} = \frac{1}{n} \qquad (i = 1, 2, \cdots, m;\ j = 1, 2, \cdots, n)$$

で，X_i の母関数 $p_i(x)$ は

$$P_i(x) = \frac{1}{n}(x + x^2 + \cdots + x^n) = \frac{1}{n}\cdot x\cdot(1 - x^n)\cdot(1 - x)^{-1}$$

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_m$$

だから，X の母関数を $p(x)$ とすると

$$p(x) = \prod_{i=1}^{m} p_i(x) = \left(\frac{1}{n}\right)^m x^m (1 - x^n)^m (1 - x)^{-m}$$

で，$P\{X = t\} = p(x)$ の x^t の係数　である。

$$(1 - x^n)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k x^{kn}$$

$$(1 - x)^{-m} = \sum_{l=0}^{\infty} \binom{-m}{l} (-1)^l x^l = \sum_{l=0}^{\infty} \binom{m+l-1}{l} x^l$$

だから,

$$P\{X=t\}=\left(\frac{1}{n}\right)^m \sum_{k=0}^{\left[\frac{t-m}{n}\right]} (-1)^k \binom{m}{k} \binom{t-1-kn}{t-m-kn} = \left(\frac{1}{n}\right)^m \sum_{k=0}^{\left[\frac{t-m}{n}\right]} (-1)^k \binom{m}{k} \binom{t-1-kn}{m-1}$$