昭和55年度（問　題）

1. 定常人口の社会において，

①　x 歳の人の平均死亡年齢を求めよ。

②　x 歳と $x+n$ 歳の間に死亡する人の平均死亡年齢を求めよ。

2. 2重脱退残存表で

$$\mu_x^{(1)} = \frac{1}{1000-x}$$

$$\mu_x^{(2)} = 1$$

$$l_0^{(T)} = 1000$$

のとき，$l_x^{(T)}$，$d_x^{(1)}$ を求めよ。

3. ゴンパーツ・メーカムの法則 $l_x = ks^x g^{c^x}$ に従う生命表においては A をある定数として

$$\bar{A}_x = A\bar{a}_x + (\mu_x - A)\bar{a}'_x$$

なることを示せ。

また $\bar{a}'_x$ の計算に使用されている利率 i' および定数 A を求む。

4. 保険料全期払の終身保険（保険金年末払）において付加保険料は平準純保険料の k 倍とする。また，この付加保険料の現価は，各年度の危険保険料の $2k'$ 倍と蓄積保険料の k' 倍の和の現価に等しい。このとき，

$$k'\left(1+\frac{(Ia)_x}{\ddot{a}_x A_x}\cdot\frac{q_x}{p_x}\right) < k < 2k'$$

となることを証明せよ。ただし，$p_x > p_{x+t}$ $(t=1,\ 2,\ 3\cdots)$ とする。

5. (x)，(y)，(z) のいずれか1人が生存している限り，毎年1の年金額が支払われる。この場合，年金額を次のとおり割り当てるものとすれば，(x)，(y)，(z) 3者それぞれの受取分の現価はどうなるか。

また，3者の受取分の現価の合計が $a_{\overline{xyz}}$ になることを示せ。

㋑　(x)，(y) が共に生存している間は，両者が $\frac{1}{2}$ ずつ受取る。

㋺　(x) が最初に死亡した場合，(y)，(z) が共に生存している間は，両者が $\frac{1}{2}$ ずつ受取る。

㋩　(y) が最初に死亡した場合，(x)，(z) が共に生存している間は，(x) が全額を受取る。

昭和55年度（解答例）

1. ① （x）の l_x 人のうちで今後 t 年と $t+dt$ 年との間に死亡する人数は，$l_{x+t}\,\mu_{x+t}\,dt$ であり，これらの死亡者の死亡年齢の総計は（$x+t$）$l_{x+t}\,\mu_{x+t}\,dt$ に等しい。

従って，（x）の平均死亡年齢は

$$\frac{1}{l_x}\int_0^\infty (x+t)\,l_{x+t}\,\mu_{x+t}\,dt = \frac{x}{l_x}\int_0^\infty l_{x+t}\,\mu_{x+t}\,dt + \frac{1}{l_x}\int_0^\infty t\,l_{x+t}\,\mu_{x+t}\,dt$$

$$= x+\mathring{e}_x$$

② (イ) （x）の l_x 人について，x 歳と $x+n$ 歳の間に死亡する人数は $l_x - l_{x+n}$ である。

(ロ) （x）の l_x 人の死亡年齢の総計は，（x）の平均死亡年齢が $x+\mathring{e}_x$ なので，$l_x\,(x+\mathring{e}_x)$ である。

(ハ) （$x+n$）の l_{x+n} 人の死亡年齢の総計も(ロ)と同様に $l_{x+n}\,(x+n+\mathring{e}_{x+n})$ である。

(ニ) (ロ)，(ハ)より（x）の l_x 人の x 歳と $x+n$ 歳の間の死亡年齢の総計は，

$$l_x\,(x+\mathring{e}_x) - l_{x+n}\,(x+n+\mathring{e}_{x+n})$$
$$= x\,l_x + T_x - (x+n)\,l_{x+n} - T_{x+n}$$
$$= T_x - T_{x+n} + x\,l_x - (x+n)\,l_{x+n}$$

(ホ) (イ)，(ニ)より，求める平均死亡年齢は，

$$\frac{T_x - T_{x+n} + x\,l_x - (x+n)\,l_{x+n}}{l_x - l_{x+n}}$$
$$= x + \frac{T_x - T_{x+n} - n\,l_{x+n}}{l_x - l_{x+n}}$$

2. $\mu_x^{(T)} = \mu_x^{(1)} + \mu_x^{(2)} = \dfrac{1}{1000-x} + 1$

$$l_x^{(T)} = l_0^{(T)}\,exp\,\{-\int_0^x (\frac{1}{1000-t} + 1)\,dt\}$$
$$= 1000\,e^{[\log(1000-t)]_0^x}\cdot e^{-x}$$
$$= (1000 - x)\,e^{-x}$$

$$d_x^{(1)} = \int_0^1 l_{x+t}^{(T)}\,\mu_{x+t}^{(1)}\,dt$$

$$= \int_0^1 (1000-x-t)e^{-x-t}\frac{1}{1000-x-t}dt$$

$$= [-e^{-x-t}]_0^1$$

$$= e^{-x} - e^{-x-1}$$

3. $\bar{A}_x = \int_0^\infty v^t\,{}_tp_x\,\mu_{x+t}\,dt$

$\mu_x = A + Bc^x$ とおくと

$$\bar{A}_x = \int_0^\infty v^t\,{}_tp_x(A+Bc^{x+t})dt$$

$$= A\int_0^\infty v^t\,{}_tp_x\,dt + Bc^x\int_0^\infty v^t\,{}_tp_x\,c^t\,dt$$

$$= A\bar{a}_x + (\mu_x - A)\int_0^\infty (vc)^t\,{}_tp_x\,dt$$

$$\therefore \bar{A}_x = A\bar{a}_x + (\mu_x - A)\bar{a}'_x$$

また上記変形中において $v' = vc$ としたので

$$\frac{1}{1+i'} = \frac{c}{1+i} \quad より \quad i' = \frac{1+i}{c} - 1$$

つぎに $l_x = ks^x g^{c^x}$ より μ_x を求めると

$$\mu_x = -\frac{d\log l_x}{dx} = -\log s - (\log g)\cdot(\log c)\cdot c^x$$

なので $A = -\log s$ なることがわかる。

4. 平準純保険料を P_x，t 年目の危険保険料を P_t^R，蓄積保険料を P_t^S とすると

$$P_x = P_t^R + P_t^S \qquad \cdots\cdots\cdots(1)$$

また

$$kP_x\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^\infty (2k'P_t^R + k'P_t^S)\frac{D_{x+t}}{D_x} \qquad \cdots\cdots\cdots(2)$$

(1), (2)より

$$kP_x\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^\infty (2k'P_x - k'P_t^S)\frac{D_{x+t}}{D_x}$$

$$= 2k'P_x\ddot{a}_x - \sum_{t=0}^\infty k'P_t^S\frac{D_{x+t}}{D_x}$$

これより

$$kP_x\ddot{a}_x<2k'P_x\ddot{a}_x$$

この両辺を $P_x\ddot{a}_x$ で除せば証明すべき式の右側の不等式 $k<2k'$ を得る。……(A)

つぎに(1), (2)より

$$kP_x\ddot{a}_x=\sum_{t=0}^{\infty}(k'P_x+k'P_t^R)\frac{D_{x+t}}{D_x}$$

$$=k'P_x\ddot{a}_x+k'\sum_{t=0}^{\infty}vq_{x+t}\ (1-{}_{t+1}V)\frac{D_{x+t}}{D_x}$$

$$=k'P_x\ddot{a}_x+k'\sum_{t=0}^{\infty}vq_{x+t}\frac{\ddot{a}_{x+t+1}}{\ddot{a}_x}\cdot\frac{D_{x+t}}{D_x}$$

$$=k'(P_x\ddot{a}_x+\frac{1}{\ddot{a}_x}\cdot\frac{1}{D_x}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{q_{x+t}}{p_{x+t}}N_{x+t+1})$$

ここで $p_x>p_{x+t}$ ($t=1,\ 2,\ \cdots$)より

$q_{x+t}>q_x$ となるから $\dfrac{q_{x+t}}{p_{x+t}}>\dfrac{q_x}{p_x}$

これより $kP_x\ddot{a}_x>k'(P_x\ddot{a}_x+\dfrac{1}{\ddot{a}_x}\cdot\dfrac{q_x}{p_x}(Ia)_x)$ ………(3)

(3)の両辺を $P_x\ddot{a}_x$ で除せば　$P_x\ddot{a}_x=A_x$ を使って

$$k>k'(1+\frac{1}{\ddot{a}_xA_x}\cdot\frac{q_x}{p_x}(Ia)_x)\qquad\text{…………(B)}$$

を得る。これは証明すべき式の左側の不等式である。

(A), (B)より証明すべき式を得る。

5. (x)の受取分の現価 $=\dfrac{1}{2}a_{xy}+a_{y|x}$

(y)の受取分の現価 $=\dfrac{1}{2}a_{xy}+\dfrac{1}{2}a_{x|yz}+a_{\overline{xz}|y}$

(z)の受取分の現価 $=\dfrac{1}{2}a_{x|yz}+a_{\overline{xy}|z}$

3者の受取分の現価の合計

$$=(\frac{1}{2}a_{xy}+a_{y|x})+(\frac{1}{2}a_{xy}+\frac{1}{2}a_{x|yz}+a_{\overline{xz}|y})+(\frac{1}{2}a_{x|yz}+a_{\overline{xy}|z})$$

$$=(a_x-\frac{1}{2}a_{xy})+(a_y+\frac{1}{2}a_{xy}+\frac{1}{2}a_{yz}-\frac{1}{2}a_{xyz}-a_{xy}-a_{yz}+a_{xyz})$$

$$+(a_z+\frac{1}{2}a_{yz}-\frac{1}{2}a_{xyz}-a_{xz}-a_{yz}+a_{xyz})$$

$$=a_x+a_y+a_z-a_{xy}-a_{yz}-a_{xz}+a_{xyz}$$

$$=a_{\overline{xyz}}$$