昭和55年度（問　題）

1. 生命表がゴンパーツの法則に従うとき，(x)，$(x+h)$ 2人の共存確率が同年齢 $(x+t)$ 2人の共存確率で置き換えられるための t を求めよ。

2. μ_{x+t} が定数のとき，次式を証明せよ。

(1) $\dfrac{1}{a_x}=\dfrac{1}{e_x}+\dfrac{1}{a_\infty}+\dfrac{1}{e_x\cdot a_\infty}$

(2) $\dfrac{1}{\bar{a}_x}=\dfrac{1}{\mathring{e}_x}+\dfrac{1}{\bar{a}_\infty}$

3. $P_{30}=0.007736$，$a_{30}=17.0652$，$p_{30}=0.99857$ として，A_{31} を求めよ。

4. 毎年 J の所得のある(x)が，保険金1に対し P_xの年掛保険料で普通終身保険に加入し，彼の死亡後その相続人がこの保険金で，永久年金（予定利率 i）を買い入れ，その年金額が(x)の生前の純所得（所得から保険料を控除した金額）の半額に等しくしようとした。

所得中からいくらの金額を保険料に振りむけたらよいか。

5. n 年満期養老保険を加入後 t 年経過時に m 年満期に期間短縮した。変更に伴う過不足金はすべて以後の平準保険料として反映する場合，変更後の純保険料を $P_{x:\overline{m}|}+P_{(1)}$ および $P_{x+t:\overline{m-t}|}-P_{(2)}$ の2つの方法で表わし，この両者が一致することを示せ。ここに付加保険料は考慮しないものとし，保険料は全期払込で年払とする。

昭和55年度（解答例）

1. ゴンパーツの法則は，(x) の死力を μ_x として

　(1)　$\mu_x = Bc^x$

　と表わされる。ここに B，c は x に関係のない定数とする。

(1)および死力の定義から

　(2)　$-\dfrac{1}{l_x}\dfrac{dl_x}{dx} = Bc^x$　　　　　　$(c \neq 1)$

(2)より l_x を求める。

$$-\frac{d\log l_x}{dx} = Bc^x$$

なので

$$\log l_x = -\frac{Bc^x}{\log c} + \log k$$

$$= c^x \cdot \log g + \log k \qquad (k > 0)$$

これから

　(3)　$l_x = kg^{c^x}$

ここに，$\log g = -\dfrac{B}{\log c}$，$k$ は積分定数とする。（$g > 0$，$c > 0$）

(x)，$(x+h)$ 2人の共存確率 ${}_np_{x,\ x+h}$ は(3)を用いると

　(4)　${}_np_{x,\ x+h} = \dfrac{l_{x+n}\,l_{x+h+n}}{l_x\,l_{x+h}}$

$$= \frac{kg^{c^{x+n}} \cdot kg^{c^{x+h+n}}}{kg^{c^x} \cdot kg^{c^{x+h}}}$$

$$= g^{c^x(c^n-1)} \cdot g^{c^{x+h}(c^n-1)}$$

$$= g^{(c^x+c^{x+h})(c^n-1)}$$

同様に

　(5)　${}_np_{x+t,\ x+t} = g^{2c^{x+t}(c^n-1)}$

題意により，(4)，(5)より

$$g^{(c^x+c^{x+h})(c^n-1)} = g^{2c^{x+t}(c^n-1)}$$

$$\therefore \quad 2c^{x+t} = c^x + c^{x+h}$$

これより t を求めれば

$$2c^t = 1+c^h$$

$$c^t = \frac{1}{2}(1+c^h)$$

から

$$t = \frac{\log(1+c^h)-\log 2}{\log c}$$

2. $\mu_{x+t} = \mu$ とおくと ${}_tp_x = exp\left(-\int_0^t \mu_{x+\tau}\,d\tau\right)$ より ${}_tp_x = e^{-\mu t}$ である。

(1)の証明

まず

$$a_x = v \cdot {}_1p_x + v^2 \cdot {}_2p_x + v^3 \cdot {}_3p_x + \cdots$$

$$= ve^{-\mu} + (ve^{-\mu})^2 + (ve^{-\mu})^3 + \cdots$$

$ve^{-\mu} < 1$ なので

(イ) $a_x = \dfrac{ve^{-\mu}}{1-ve^{-\mu}}$

つぎに

$$e_x = {}_1p_x + {}_2p_x + {}_3p_x + \cdots$$

$$= e^{-\mu} + e^{-2\mu} + e^{-3\mu} + \cdots$$

$e^{-\mu} < 1$ なので

(ロ) $e_x = \dfrac{e^{-\mu}}{1-e^{-\mu}}$

同様に

$$a_\infty = v + v^2 + v^3 + \cdots$$

$v < 1$ なので

(ハ) $a_\infty = \dfrac{v}{1-v}$

(イ), (ロ), (ハ)より v, $e^{-\mu}$ を消去すれば(1)を得る。

(2)の証明

(1)の証明と同様に

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty v^t\, {}_tp_x\, dt = \int_0^\infty e^{-\delta t} e^{-\mu t}\, dt = \int_0^\infty e^{-(\delta+\mu)t}\, dt = \frac{1}{\delta+\mu}$$

より

(イ) $\bar{a}_x = \dfrac{1}{\delta+\mu}$

$$\mathring{e}_x = \int_0^\infty {}_tp_x\, dt = \int_0^\infty e^{-\mu t}\, dt = \frac{1}{\mu}$$

より

(ロ) $\mathring{e}_x = \dfrac{1}{\mu}$

$$\bar{a}_{\overline{\infty}|} = \int_0^\infty v^t\, dt = \int_0^\infty e^{-\delta t}\, dt = \frac{1}{\delta}$$

より

(ハ) $\bar{a}_{\overline{\infty}|} = \dfrac{1}{\delta}$

(イ), (ロ), (ハ)より δ, μを消去すれば(2)を得る。

3. $P_x = \dfrac{1}{1+a_x} - d = \dfrac{1}{1+a_x} - \dfrac{i}{1+i}$

より

$$P_{30} = \frac{1}{1+a_{30}} - \frac{i}{1+i}$$

これに P_{30}, a_{30}の数値を代入して, i を求める。

$$0.007736 = \frac{1}{18.0652} - \frac{i}{1+i}$$

$\therefore\ i \fallingdotseq 0.05$

また $A_x = 1-d(1+a_x)$ より

$$A_{x+1} = 1-d(1+a_{x+1}) = 1-d\frac{a_x}{vp_x}$$ なので

$$A_{x+1} = 1 - i\frac{a_x}{p_x}$$

これに i，a_{30}，p_{30} の数値を代入して A_{31} を求める。

$$A_{31} \fallingdotseq 1 - 0.05 \times \frac{17.0652}{0.99857}$$

$$\fallingdotseq 0.14552$$

4. 所得中のXで保険契約に加入するとすれば，その保険金額は $\dfrac{X}{P_x}$ である。

この保険金で買い入れる永久年金の年金額が，純所得の $\dfrac{1}{2}$ に等しくなくてはならない。

永久年金の年金額は $\dfrac{X}{P_x} \cdot i$ であるから

$$\frac{X}{P_x} \cdot i = \frac{1}{2}\left(J - X\right)$$

これからXを求めて

$$X = \frac{JP_x}{P_x + 2i}$$

5. (1) $P_{x:\overline{m}|} + P_{(1)} = P_{x:\overline{m}|} + \dfrac{{}_tV_{x:\overline{m}|} - {}_tV_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}}$

(2) $P_{x+t:\overline{m-t}|} - P_{(2)} = P_{x+t:\overline{m-t}|} - \dfrac{{}_tV_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}}$

つぎに(1)，(2)が一致することを示す。

(1)の右辺 $= P_{x:\overline{m}|} + \dfrac{{}_tV_{x:\overline{m}|} - {}_tV_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}}$

$$= P_{x:\overline{m}|} + \frac{A_{x+t:\overline{m-t}|}}{\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}} - P_{x:\overline{m}|} - \frac{{}_tV_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}}$$

$$= P_{x+t:\overline{m-t}|} - \frac{{}_tV_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}}$$

=(2)の右辺