昭和54年度（問　題）

1.　（0, 1）上の一様分布U（0. 1）に従う確率変数Xに対し，X，$1-X$のうち小さい方をY，大きい方をZとする。

(ア)　Y，Zはそれぞれ一様分布$U(0, \frac{1}{2})$，$U(\frac{1}{2}, 1)$に従うことを示せ。

(イ)　$E(Z/Y)$は無限大となることを示せ。

2.　ある保険会社のある保険種類（保険期間1年）について，次の(1)〜(3)が成立つという。

(1)　契約は，1事業年度を通じて一様に締結される。

(2)　保険事故は，契約締結から1年間にわたって一様に発生する。

(3)　保険金の支払日は，保険事故の発生日から1年間にわたって一様に分布する。

このとき，ある特定の事業年度に締結された契約により支払われる金額の年度（事業年度）別の比率を求めよ。ただし，契約の締結，保険事故の発生，保険金の支払いは互いに独立な事象とし，また，1件ごとに支払われる保険金は同額とする。

3.　チョコレートの包紙の裏に，1個について，n種類のマークのうちどれか1種類が印刷されて販売されている。n種類のマーク全部を集めれば景品がもらえるという。景品をもらうためには平均何個のチョコレートを買えばよいか。ただし，n種類のマークは均等に分布しているものとする。

（ヒント：まず，特定のマークk種類のうちどれか1種類が出るまでに必要な購入個数X_kの平均値を求めよ。）

4.　試行ごとにある事象の起る確率をpとして，n回の独立な試行中この事象が偶数回（0回を含む）起る確率p_nを求めよ。ただし，$p_0=1$とする。

5.　X，Yを，どちらも正規分布$N(0,1)$に従う独立な確率変数とするとき，Y/Xの密度関数を求めよ。

昭和54年度（解答例）

1. （ア） $0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき，

$P[Y < t] = 1 - P[Y \geqq t] = 1 - P[X \geqq t,\ 1 - X \geqq t]$

$= 1 - P[t \leqq X \leqq 1 - t] = 1 - \left\{(1-t) - t\right\} = 2t$

$t < 0$ のときには $P[Y < t] = 0$

$t > \dfrac{1}{2}$ のときには $P[Y < t] = 1$

従って， Y は $U\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ に従う。

また， $\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq 1$ のとき，

$P[Z < t] = P[X < t,\ 1 - X < t] = P[1 - t < X < t]$

$= t - (1 - t) = 2t - 1$

$t < \dfrac{1}{2}$ のときには $P[Z < t] = 0$

$t > 1$ のときには $P[Z < t] = 1$

従って， Z は $U\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right)$ に従う。

（イ） $U = \dfrac{Z}{Y}$ とおくと， $t > 1$ のとき，

$P[U < t] = P\left[\dfrac{Z}{Y} < t\right] = P\left[1 \leqq \dfrac{1-X}{X} < t\right] + P\left[1 < \dfrac{X}{1-X} < t\right]$

$= P\left[\dfrac{1}{t+1} < X \leqq \dfrac{1}{2}\right] + P\left[\dfrac{1}{2} < X < \dfrac{t}{t+1}\right]$

$= \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{t+1}\right) + \left(\dfrac{t}{t+1} - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{t-1}{t+1}$

$t \leqq 1$ のときには $P[U < t] = 0$

従って，U の密度関数 u は，$u(t) = \begin{cases} 0 & , \ t \leqq 1 \\ \dfrac{2}{(t+1)^2} & , \ t > 1 \end{cases}$

従って，$E\left(\dfrac{Z}{Y}\right) = E(U) = \displaystyle\int_1^{\infty} tu(t)\,dt = \int_1^{\infty} \frac{2t}{(t+1)^2}\,dt$

$$= 2\int_1^{\infty}\left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{(t+1)^2}\right)dt = 2\left[\log(t+1) + \frac{1}{t+1}\right]_1^{\infty}$$

$$= \infty$$

（イ）の別解：$Y+Z=1$ で，しかも Y は $U\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ に従うから，

$$E\left(\frac{Z}{Y}\right) = E\left(\frac{1-Y}{Y}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-y}{y}\,2dy = 2\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{y} - 1\right)dy$$

$$= 2\left[\log y - y\right]_0^{\frac{1}{2}} = \infty$$

あるいは，次のようにしてもよい：$Z \geqq \dfrac{1}{2}$ であるから，

$$E\left(\frac{Z}{Y}\right) \geqq \frac{1}{2}E\left(\frac{1}{Y}\right) = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{y}\,2dy = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{y}\,dy = \left[\log y\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \infty$$

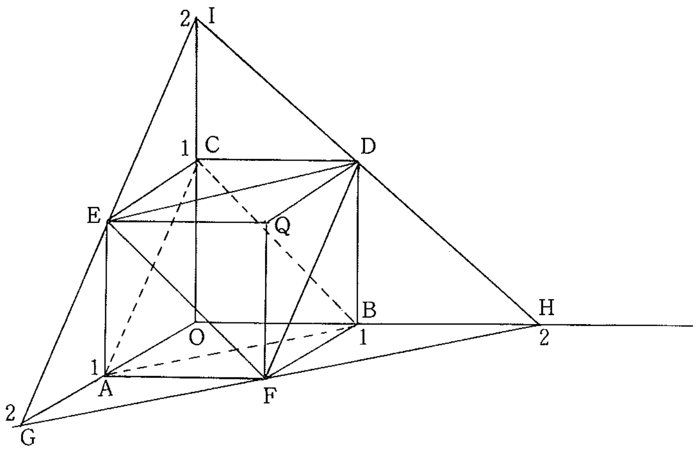
2. 問題は，X_1，X_2，X_3 をそれぞれ $U(0, 1)$ に従う独立な確率変数とし，$S = X_1 + X_2 + X_3$ とするとき，$p_1 = P[0 \leqq S < 1]$，$p_2 = P[1 \leqq S < 2]$，$p_3 = P[2 \leqq S < 3]$ の比を求めることに帰着する。

図より，$p_1 = 3$ 角錐 $OABC$ の体積 $= \dfrac{1}{6}$

$p_3 = 3$ 角錐 $DEFQ$ の体積 $= \dfrac{1}{6}$

$p_2 = 1 - p_1 - p_2 = \dfrac{4}{6}$

従って，　$p_1:p_2:p_3=1:4:1$



2の別解：　$U(0,\ 1)$ の密度関数を f ，分布関数を F とする。また，X_1+X_2，$X_1+X_2+X_3$ の密度関数を g ，h とし，X_1+X_2の分布関数を G とする。

$$g(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-y)f(y)\,dy=\int_0^1 f(x-y)\,dy=\left[-F(x-y)\right]_{y=0}^{y=1}$$

$$=F(x)-F(x-1)$$

$$=0\ (x\leqq 0),\ \ x\ (0\leqq x\leqq 1),\ \ 2-x\ (1\leqq x\leqq 2),\ \ 0\ (2\leqq x)$$

$$G(x)=\int_{-\infty}^{x}g(y)\,dy$$

$$=0\ (x\leqq 0),\ \ \frac{1}{2}x^2\ (0\leqq x\leqq 1),\ \ -\frac{1}{2}x^2+2x-1\ (1\leqq x\leqq 2),\ \ 1\ (2\leqq x)$$

$$h(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x-y)f(y)\,dy=\int_0^1 g(x-y)\,dy=\left[-G(x-y)\right]_{y=0}^{y=1}$$

$$=G(x)-G(x-1)$$

$$=0\ (x\leqq 0),\ \ \frac{1}{2}x^2\ (0\leqq x\leqq 1),\ \ -x^2+3x-\frac{3}{2}\ (1\leqq x\leqq 2),$$

$$\frac{1}{2}x^2-3x+\frac{9}{2}\ (2\leqq x\leqq 3),\ \ 0\ (3\leqq x)$$

$$\therefore p_1=\int_0^1 h(x)\,dx=\frac{1}{6},\ \ p_2=\int_1^2 h(x)\,dx=\frac{4}{6},\ \ \ p_3=\int_2^3 h(x)\,dx=\frac{1}{6}$$

3. $P[X_k = r] = \left(1 - \dfrac{k}{n}\right)^{r-1} \dfrac{k}{n}$, $r = 1, 2, \cdots$

従って，$EX_k = \dfrac{n}{k}$

さて，第１回目の購入でマーク m_1 が出たとして，m_1 以外のマーク $(n-1)$種類のうちどれか１種類 (m_2とする) が出るまでに必要な購入個数は X_{n-1} ，次に，m_1 ，m_2 以外のマーク ($n-2$) 種類のうちどれか１種類 (m_3) が出るまでに必要な購入個数は X_{n-2}，以下同様。

従って，n 種類のマーク全てが揃うまでに必要な購入個数 X は

$$X = 1 + X_{n-1} + X_{n-2} + \cdots + X_1$$

従って，$EX = 1 + EX_{n-1} + EX_{n-2} + \cdots + EX_1$

$$= 1 + \frac{n}{n-1} + \frac{n}{n-2} + \cdots + \frac{n}{1}$$

$$= n\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$$

4. $p_o = 1$，$p_k = p_{k-1}(1-p) + (1-p_{k-1})p \quad (1 \leqq k \leqq n)$

$\therefore p_k = p + p_{k-1}(1-2p)$

$\therefore p_k - \dfrac{1}{2} = (1-2p)\left(p_{k-1} - \dfrac{1}{2}\right) \quad (1 \leqq k \leqq n)$

n 個の式を辺々乗じて，$p_n - \dfrac{1}{2} = (1-2p)^n\left(p_o - \dfrac{1}{2}\right)$

$\therefore p_n = \dfrac{1}{2}\left\{1 + (1-2p)^n\right\}$

４の別解：$q = 1 - p$ とおく。

まず，n が偶数の場合，

$$(q-p)^n = p^n - \binom{n}{1} p^{n-1} q + \binom{n}{2} p^{n-2} q^2 - \cdots + \binom{n}{n} q^n$$

$$1 = (q+p)^n = p^n + \binom{n}{1} p^{n-1} q + \binom{n}{2} p^{n-2} q^2 + \cdots + \binom{n}{n} q^n$$

従って，

$$p_n = p^n + \binom{n}{2} p^{n-2} q^2 + \binom{n}{4} p^{n-4} q^4 + \cdots + \binom{n}{n} q^n$$

$$= \frac{1}{2}\left\{(q-p)^n + 1\right\} = \frac{1}{2}\left\{1 + (1-2p)^n\right\}$$

次に，n が奇数の場合，

$$(q-p)^n = -p^n + \binom{n}{1} p^{n-1} q - \binom{n}{2} p^{n-2} q^2 + \cdots + \binom{n}{n} q^n$$

$$1 = (q+p)^n = p^n + \binom{n}{1} p^{n-1} q + \binom{n}{2} p^{n-2} q^2 + \cdots + \binom{n}{n} q^n$$

従って，

$$p_n = \binom{n}{1} p^{n-1} q + \binom{n}{3} p^{n-3} q^3 + \cdots + \binom{n}{n} q^n$$

$$= \frac{1}{2}\left\{(q-p)^n + 1\right\} = \frac{1}{2}\left\{1 + (1-2p)^n\right\}$$

5. $H(z) = P\left[\frac{Y}{X} < z\right] = 2P\left[\frac{Y}{X} < z,\ X > 0\right]$

$$= 2\iint_{\frac{y}{x} < z,\ x>0} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\, dx\, dy$$

$$= \frac{1}{\pi}\iint_{\tan\theta < z,\ -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}} e^{-\frac{1}{2}r^2} r\, dr\, d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\Theta} d\theta \int_0^{+\infty} dr \cdot r e^{-\frac{1}{2}r^2} \quad (\tan\Theta = z)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\Theta + \frac{\pi}{2}\right)\left[-e^{-\frac{1}{2}r^2}\right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\Theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

従って，

$$h(z) = \frac{dH(z)}{dz} = \frac{dH(z)}{d\Theta} \cdot \frac{d\Theta}{dz} = \frac{1}{\pi(1+z^2)}$$

5の別解：$U = X$， $V = \dfrac{Y}{X}$と変数変換し，（X, Y)の同時密度関数を$f(x, y)$，

（U, V） の同時密度関数を $g(u, v)$ とする。

$X = U$，$Y = UV$ より， $g(u, v) = f(u, uv)\,|J|$，

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial u} & \dfrac{\partial u}{\partial v} \\ \dfrac{\partial uv}{\partial u} & \dfrac{\partial uv}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ v & u \end{vmatrix} = u$$

また，仮定より， $f(x, y) = \dfrac{1}{2\pi}\, e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$

従って， $g(u, v) = \dfrac{1}{2\pi} e^{-\frac{u^2+u^2v^2}{2}}\, |u| = \dfrac{|u|}{2\pi}\, e^{-\frac{1}{2}u^2(1+v^2)}$

従って， V の密度関数 $h(v)$は

$$h(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u, v)\, du = 2\int_0^{+\infty} \frac{u}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}u^2(1+v^2)}\, du$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{e^{-\frac{1}{2}u^2(1+v^2)}}{1+v^2}\right]_{u=0}^{u=\infty}$$

$$= \frac{1}{\pi(1+v^2)}$$