昭和54年度（問　題）

1.　$\mu_x = \dfrac{1}{100-x}$ なるときに，$\mathring{e}_{\overline{40:50}}$　を求めよ。

2.　$\mu_x = \left(1+\dfrac{d\bar{a}_x}{dx}\right)\bar{P}(\bar{A}_x) - \dfrac{d\bar{A}_x}{dx}$ を導け。ここに，$\bar{P}(\bar{A}_x) = \dfrac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x}$ とする。

3.　ある多重脱退残存表において，

$$l_x^{(T)} = (a-x^2)e^{-x},\quad d_x^{(1)} = 2\{e^{-x}(x+1) - e^{-x-1}(x+2)\}$$

なるとき，$\mu_x^{(1)}$ を求めよ。

4.　計算基礎のうち，予定利率はそのままとし，予定死亡率のみを変更する場合，変更前後の両者の責任準備金（平準純保険料式）が毎年度等しければ，各年度の変更後死亡率と変更前死亡率との差は，その年度の危険保険金に反比例することを，普通終身保険の場合で証明せよ。

5.　(x) が $x+n$ 歳以後に生存するか，(y) が $y+m$ 歳以後に生存するか，少くともいずれか一方が生存する限り，年金額1を支払う保険がある。

年掛保険料は年金を受け取らない限り支払うものとする。

ここに，$x>y$，$x+n=y+m$，年金は期始払とする。

(1)　この保険の年掛純保険料を求めよ。

(2)　年掛純保険料を P として，純保険料式責任準備金を求めよ。

昭和54年度（解答例）

1. $\mathring{e}_{\overline{x:y}} = \mathring{e}_x + \mathring{e}_y - \mathring{e}_{x:y}$ なので，右辺の各項を計算して，それより $\mathring{e}_{\overline{40:50}}$ を求める。

まず，

$$ {}_np_x = exp\left\{-\int_0^n \mu_{x+t}\,dt\right\} = exp\left\{-\int_0^n \frac{1}{100-(x+t)}dt\right\} $$

$$ = exp\left[\log\left\{100-(x+t)\right\}\right]_0^n = \frac{100-(x+n)}{100-x} $$

$$ = 1-\frac{n}{100-x} $$

次に

$$ \mathring{e}_x = \int_0^{100-x} {}_np_x\,dn = \int_0^{100-x}\left(1-\frac{n}{100-x}\right)dn = \left[n-\frac{n^2}{2(100-x)}\right]_0^{100-x} $$

$$ = (100-x)-\frac{(100-x)^2}{2(100-x)} $$

$$ = \frac{100-x}{2} $$

同様にして

$$ \mathring{e}_y = \frac{100-y}{2} $$

次に

$$ \mathring{e}_{x:y}\ (x<y) = \int_0^{100-y} {}_np_x \cdot {}_np_y \cdot dn = \int_0^{100-y}\left(1-\frac{n}{100-x}\right)\left(1-\frac{n}{100-y}\right)dn $$

$$ = \int_0^{100-y}\left\{1-\left(\frac{1}{100-x}+\frac{1}{100-y}\right)n+\frac{1}{(100-x)(100-y)}n^2\right\}dn $$

$$= \left[n - \left(\frac{1}{100-x} + \frac{1}{100-y} \right) \frac{n^2}{2} + \frac{1}{(100-x)(100-y)} \cdot \frac{n^3}{3} \right]_0^{100-y}$$

$$= (100-y) - \left(\frac{1}{100-x} + \frac{1}{100-y} \right) \frac{(100-y)^2}{2} + \frac{1}{(100-x)(100-y)} \frac{(100-y)^3}{3}$$

$$= \frac{100-y}{2} - \frac{1}{6} \frac{(100-y)^2}{100-x}$$

$$\therefore \mathring{e}_{\overline{40:50}} = \mathring{e}_{40} + \mathring{e}_{50} - \mathring{e}_{40:50}$$

$$= \frac{100-40}{2} + \frac{100-50}{2} - \left\{ \frac{100-50}{2} - \frac{1}{6} \frac{(100-50)^2}{100-40} \right\}$$

$$\fallingdotseq 30 + 25 - 18.06$$

$$= 36.94$$

2. 右辺の $\dfrac{d\bar{a}_x}{dx}$, $\dfrac{d\bar{A}_x}{dx}$ を求めて，右辺が左辺の μ_x に等しいことを計算する。

まず

$$\frac{d\bar{a}_x}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\overline{N}_x}{D_x} \right) = \frac{1}{(D_x)^2} \left(D_x \frac{d\overline{N}_x}{dx} - \overline{N}_x \frac{dD_x}{dx} \right)$$

$$\frac{d\bar{A}_x}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\overline{M}_x}{D_x} \right) = \frac{1}{(D_x)^2} \left(D_x \frac{d\overline{M}_x}{dx} - \overline{M}_x \frac{dD_x}{dx} \right)$$

ここで

$$\frac{d\overline{N}_x}{dx} = \frac{d}{dx} \int_x^\infty D_y dy = -D_x$$

$$\frac{d\overline{M}_x}{dx} = \frac{d}{dx} \int_x^\infty D_y \mu_y dy = -D_x \mu_x$$

$$\frac{dD_x}{dx} = \frac{d}{dx} \left(l_x v^x \right) = -D_x (\mu_x + \delta)$$

なることより

$$\frac{d\bar{a}_x}{dx} = \frac{1}{(D_x)^2} \left[D_x(-D_x) - \overline{N}_x \left\{ -D_x(\mu_x + \delta) \right\} \right]$$

$$= -1 + \bar{a}_x(\mu_x + \delta)$$

$$\frac{d\bar{A}_x}{dx} = \frac{1}{(D_x)^2}\left[D_x(-D_x\mu_x) - \bar{M}_x\left\{-D_x(\mu_x+\delta)\right\}\right]$$

$$= -\mu_x + \bar{A}_x(\mu_x + \delta)$$

$$右辺 = \left(1 + \frac{d\bar{a}_x}{dx}\right)\bar{P}(\bar{A}_x) - \frac{d\bar{A}_x}{dx}$$

$$= \left[1 + \left\{-1 + \bar{a}_x(\mu_x+\delta)\right\}\right]\frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x} - \left\{-\mu_x + \bar{A}_x(\mu_x+\delta)\right\}$$

$$= \mu_x$$

$$= 左辺$$

3. $l_x^{(1)} = \sum_{y=x}^{\infty} d_y^{(1)}$

$$= 2\left\{e^{-x}(x+1) - e^{-x-1}(x+2)\right\}$$

$$+ 2\left\{e^{-x-1}(x+2) - e^{-x-2}(x+3)\right\}$$

$$\vdots$$

$$= 2e^{-x}(x+1)$$

$$\mu_x^{(1)} = -\frac{1}{l_x^{(T)}}\cdot\frac{dl_x^{(1)}}{dx}$$

$$= -\frac{1}{(a-x^2)e^{-x}}\frac{d}{dx}\left\{2e^{-x}(x+1)\right\}$$

$$= -\frac{1}{(a-x^2)e^{-x}}\left\{-2e^{-x}(x+1) + 2e^{-x}\right\}$$

$$= \frac{2x}{a-x^2}$$

4. 責任準備金の再帰公式より

$$({}_tV+P)(1+i)={}_{t+1}V+q_{x+t}(1-{}_{t+1}V) \cdots\cdots (1)$$

計算基礎を変更した場合，記号に ′ をつけて表わし，

$i'=i$ ，${}_tV'={}_tV$， ${}_{t+1}V'={}_{t+1}V$ を考慮すると

$$({}_tV+P')(1+i)={}_{t+1}V+q'_{x+t}(1-{}_{t+1}V) \cdots\cdots (2)$$

(2) − (1)をつくると

$$(P'-P)(1+i)=(q'_{x+t}-q_{x+t})(1-{}_{t+1}V)$$

これより

$$q'_{x+t}-q_{x+t}=(P-P')(1+i)\frac{1}{1-{}_{t+1}V}$$

であり，これは，各年度の変更後死亡率と変更前死亡率との差は，その年度の危険保険金に反比例することを示している。

5. (1) $m>n$ のため

$$P=\frac{{}_{n|}\ddot{a}_x+{}_{m|}\ddot{a}_y-{}_{m|}\ddot{a}_{xy}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}+\ddot{a}_{y:\overline{n}|}-\ddot{a}_{xy:\overline{n}|}+\sum_{j=0}^{m-n-1}v^{n+j}\,{}_{n+j}q_x\cdot{}_{n+j}p_y}$$

(2) (i) $t<n$ のとき

(イ) (x)，(y) 生存中

$$\begin{aligned}&{}_{n-t|}\ddot{a}_{x+t}+{}_{m-t|}\ddot{a}_{y+t}-{}_{m-t|}\ddot{a}_{x+t\ y+t}-P(\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}+\ddot{a}_{y+t:\overline{n-t}|}\\&-\ddot{a}_{x+t\ y+t:\overline{n-t}|}+\sum_{j=0}^{m-n-1}v^{n+j-t}\cdot{}_{n+j-t}q_{x+t}\cdot{}_{n+j-t}p_{y+t})\end{aligned}$$

(ロ) (x) 死亡，(y) 生存中

$${}_{m-t|}\ddot{a}_{y+t}-P\ddot{a}_{y+t:\overline{m-t}|}$$

(ハ) (y) 死亡，(x) 生存中

$${}_{n-t|}\ddot{a}_{x+t}-P\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$$

(ii) $n \leqq t < m$ のとき

(イ) (x), (y) 生存中

$$\ddot{a}_{x+t} + {}_{m-t|}\ddot{a}_{y+t} - {}_{m-t|}\ddot{a}_{x+t\ y+t} - P\left(\sum_{j=0}^{m-t-1} v^j \cdot {}_jq_{x+t} \cdot {}_jp_{y+t}\right)$$

(ロ) (x)死亡, (y) 生存中

$${}_{m-t|}\ddot{a}_{y+t} - P\ddot{a}_{y+t:\overline{m-t|}}$$

(ハ) (y)死亡, (x) 生存中

$$\ddot{a}_{y+t}$$

(iii) $m \leqq t$ のとき

(イ) (x), (y) 生存中

$$\ddot{a}_{x+t} + \ddot{a}_{y+t} - \ddot{a}_{x+t\ y+t}$$

(ロ) (x)死亡, (y) 生存中

$$\ddot{a}_{x+t}$$

(ハ) (y)死亡, (x) 生存中

$$\ddot{a}_{x+t}$$