昭和54年度（問　題）

1.　元金１を投資して利殖する場合，t 年後の利力を$\dfrac{1}{(1+kt)^2}$として，t が増大するに従って終価は $e^{\frac{99}{100}}$ に近づくものとするとき，$t=100$ の終価を求めよ。

2.　$\mathring{e}_x=0.8(75-x)$ とする。このとき，

(1)　l_x を求めよ。

(2)　μ_x の逆数と q_x の逆数の差を小数点以下１桁まで求めよ。

ここに，$l_0=100{,}000$，$\mathring{e}_x \fallingdotseq e_x+\dfrac{1}{2}$　とする。

3.　年齢 x 歳から $x+n$ 歳までの間で，$l_{x+t}=l_x(1-kt)$ なる式が成り立つときには，

$$\bar{a}_{\overline{n}|}-\bar{a}_{x:\overline{n}|}=\frac{k}{\delta}(\bar{a}_{\overline{n}|}-nv^n)$$

なることを示せ。

4.　生存基数 D_x が K^x（Kは $0<K<1$ なる定数）で表わされるとき，

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|}=1+\frac{\delta(1-K^n)}{\log K}$$

なることを示せ。

5.　$P=\dfrac{D_{x+n}}{D_x\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$　のとき，$\dfrac{D_{x+n}}{D_{x+t}}-P\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}>P\ddot{s}_{\overline{t}|}$　が成り立つことを，

(1)　算式で証明せよ。

(2)　言葉で説明せよ。

昭和54年度（解答例）

1.　t における終価を S_t とすると

$$S_t = exp\left\{\int_0^t \delta_t \, dt\right\}$$

となる。ここに δ_t は利力で，$\delta_t = \dfrac{1}{(1+kt)^2}$　である。

つぎに

$$\int_0^t \delta_t \, dt = \int_0^t \frac{1}{(1+kt)^2} dt = \left[\frac{1}{k} \cdot \frac{-1}{1+kt}\right]_0^t$$

$$= \frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{1+kt}\right)$$

なので

$$\int_0^\infty \delta_t \, dt = \frac{1}{k}$$

をうる。

題意により

$$S_\infty = exp\left\{\int_0^\infty \delta_t \, dt\right\} = e^{\frac{99}{100}} = e^{\frac{1}{k}}$$

なので

$$k = \frac{100}{99}$$

である。

$$\int_0^{100} \delta_t \, dt = \frac{1}{\dfrac{100}{99}}\left(1 - \frac{1}{1 + \dfrac{100}{99} \times 100}\right)$$

$$= \frac{9{,}900}{10{,}099}$$

より

$$S_{100} = exp\left\{\int_0^{100} \delta_t \, dt\right\}$$

$$= e^{\frac{9{,}900}{10{,}099}}$$

2.　（1）　$\mathring{e}_x = 60 - 0.8x$　なので

$$\frac{d\mathring{e}_x}{dx} = -0.8$$

一方

$$\frac{d\mathring{e}_x}{dx} = \mathring{e}_x\mu_x - 1$$

$\therefore -0.8 = (60-0.8x)\mu_x - 1$

これより

$$\mu_x = \frac{1}{300-4x}$$

題意により

$$l_x = l_0 exp\left\{-\int_0^x \mu_y\, dy\right\},\quad l_0 = 100,000 \quad \text{なので}$$

$$l_x = l_0 exp\left\{-\int_0^x \frac{1}{300-4y}\, dy\right\} = l_0 exp\left[\frac{1}{4}\log(300-4y)\right]_0^x$$

$$= 100,000\left(\frac{300-4x}{300}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$= 100,000\left(1-\frac{x}{75}\right)^{\frac{1}{4}}$$

（2）（1）より

$$\frac{1}{\mu_x} = 300-4x$$

また

$$e_x = \frac{l_{x+1}+l_{x+2}+l_{x+3}+\cdots\cdots}{l_x} = \frac{l_{x+1}}{l_x} + \frac{l_{x+1}}{l_x}\cdot\frac{l_{x+2}+l_{x+3}+\cdots\cdots}{l_{x+1}}$$

$$= p_x + p_x \cdot e_{x+1}$$

から

$$p_x = \frac{e_x}{1+e_{x+1}} \fallingdotseq \frac{\mathring{e}_x - \frac{1}{2}}{1+\mathring{e}_{x+1} - \frac{1}{2}} = \frac{\mathring{e}_x - 0.5}{\mathring{e}_{x+1} + 0.5}$$

なので

$$p_x \fallingdotseq \frac{60-0.8x-0.5}{60-0.8(x+1)+0.5} = \frac{59.5-0.8x}{59.7-0.8x}$$

従って

$$q_x = 1-p_x \fallingdotseq 1-\frac{59.5-0.8x}{59.7-0.8x} = \frac{0.2}{59.7-0.8x}$$

$$\therefore \frac{1}{q_x} \fallingdotseq 298.5-4x$$

$$\therefore \frac{1}{\mu_x} - \frac{1}{q_x} \fallingdotseq 1.5$$

3. $\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t {}_t p_x \, dt$ であるが

$l_{x+t} = l_x(1-kt)$ なので $\quad {}_t p_x = \dfrac{l_{x+t}}{l_x} = 1-kt$ である。

これを上式の右辺に代入して計算すると

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t(1-kt)\,dt = \int_0^n v^t\,dt - k\int_0^n tv^t\,dt$$

$$= \int_0^n v^t\,dt - k\left\{\left[t\frac{v^t}{\log v}\right]_0^n - \int_0^n \frac{v^t}{\log v}\,dt\right\}$$

$$= \bar{a}_{\overline{n}|} + \frac{k}{\delta}(nv^n - \bar{a}_{\overline{n}|})$$

これを整理すれば

$$\bar{a}_{\overline{n}|} - \bar{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{k}{\delta}(\bar{a}_{\overline{n}|} - nv^n)$$

をうる。

4. $\bar{A}_{x:\overline{n}|} = 1-\delta\bar{a}_{x:\overline{n}|} = 1 - \dfrac{\delta}{D_x}\displaystyle\int_0^n D_{x+t}\,dt$ であるが

$D_x = K^x$ なのでこれを上式の右辺に代入して計算すると

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} = 1 - \frac{\delta}{K^x}\int_0^n K^{x+t}\,dt = 1-\delta\left[\frac{K^t}{\log K}\right]_0^n = 1-\frac{\delta(K^n-1)}{\log K}$$

$$\therefore \bar{A}_{x:\overline{n}|} = 1 + \frac{\delta(1-K^n)}{\log K}$$

5. （1） $\dfrac{D_{x+n}}{D_{x+t}} - P\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$

$$=\frac{D_{x+n}}{D_{x+t}}-\frac{D_{x+n}}{D_x\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}\cdot\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}$$

$$=\frac{D_{x+n}}{D_{x+t}}-\frac{D_{x+n}}{D_x}\cdot\frac{D_x}{N_x-N_{x+n}}\cdot\frac{N_{x+t}-N_{x+n}}{D_{x+t}}$$

$$=\frac{D_{x+n}(N_x-N_{x+n})-D_{x+n}(N_{x+t}-N_{x+n})}{D_{x+t}(N_x-N_{x+n})}$$

$$=\frac{D_{x+n}(N_x-N_{x+t})}{D_{x+t}(N_x-N_{x+n})}$$

$$=P\cdot\frac{D_x+D_{x+1}+\cdots+D_{x+t-1}}{D_{x+t}}$$

$$=P\left\{(1+i)^t\cdot\frac{l_x}{l_{x+t}}+(1+i)^{t-1}\cdot\frac{l_{x+1}}{l_{x+t}}+\cdots+(1+i)\cdot\frac{l_{x+t-1}}{l_{x+t}}\right\}$$

$$>P\left\{(1+i)^t+(1+i)^{t-1}+\cdots+(1+i)\right\}$$

$$=P\ddot{s}_{\overline{t|}}$$

（2） n年満期の生存保険の責任準備金は，どの時点でも，それまでの保険料の終価より大きい。