昭和53年度（問　題）

1. $X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n$を，一様分布$U(0,1)$に従う独立な確率変数とし，

$$Y=\min\{X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n\}, \qquad Z=\max\{X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n\}$$

とする。

(i) YおよびZの確率密度関数を求めよ。

(ii) YおよびZの平均値を求めよ。

2. $N(\mu, \sigma^2)$の平均μに対する信頼係数αの最短信頼区間を求めよ。ただし，σ^2は既知とする。

3. 既知の分散σ^2をもつ正規母集団の母平均の検定において，標本平均値と仮説平均との相違が$\sigma/4$以上になったとき仮説をすてるという検定を行う。有意水準5％以下でこの検定を行うには，標本の大きさを最低いくつにすればよいか。

（注）

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{1.96} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 0.475$$

4. 連続的な分布をもつ母集団から大きさnの標本$(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$をとり，これを大きさの順に並べて$y_1 \leqq y_2 \leqq \cdots\cdots \leqq y_n$とする。$2r<n$のとき，区間$(y_r, y_{n-r+1})$は，母集団メジアンの信頼係数$1-\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{r-1}\binom{n}{k}$の信頼区間となることを示せ。

5. μは既知でσ^2は未知の正規母集団$N(\mu, \sigma^2)$から大きさnの標本$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$が得られたとき，σ^2の最尤推定値$\hat{\sigma}^2$を求めよ。また，その不偏性を示せ。

昭和53年度（解答例）

1. (i) $P_r(Y \leqq t) = 1-P_r(Y > t)$

$$= 1-P_r(X_1 > t,\ X_2 > t, \cdots\cdots,\ X_n > t)$$

$$= 1-\prod_{i=1}^{n} P_r(X_i > t)$$ （∵ X_1, X_2, ……, X_n は互いに独立）

$$= 1-(1-t)^n$$ （∵ X_1, X_2, ……, X_n は一様分布 $U(0, 1)$ に従う）

よって Y の確率密度関数を $f_Y(t)$ で表わすと，

$$f_Y(t) = n(1-t)^{n-1} \qquad (0 \leqq t \leqq 1)$$

同様に Z の確率密度関数 $f_Z(t)$ を求めると，

$$P_r(Z \leqq t) = P_r(X_1 \leqq t,\ X_2 \leqq t, \cdots\cdots,\ X_n \leqq t)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} P_r(X_i \leqq t)$$

$$= t^n$$

より，

$$f_Z(t) = nt^{n-1} \qquad (0 \leqq t \leqq 1)$$

(ii) $E(Y) = \int_0^1 t \cdot n(1-t)^{n-1}\, dt$

$$= -t(1-t)^n \Big|_0^1 + \int_0^1 (1-t)^n\, dt$$

$$= -\left.\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1}\right|_0^1$$

$$= \frac{1}{n+1}$$

$$E(Z) = \int_0^1 tnt^{n-1}\,dt$$

$$= \left.\frac{nt^{n+1}}{n+1}\right|_0^1$$

$$= \frac{n}{n+1}$$

2. 大きさnの標本平均 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ をとると，

$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ は $N(0, 1)$ に従う。よって，

$$P_r\left(a < \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \alpha$$

となる a， b を定めると，

$$P_r\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}b < \mu < \overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}a\right) = \alpha$$

となり，信頼度αの信頼区間は，

$$\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}b,\ \overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}a\right)$$

である。

ここで，区間の長さ$\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}(b-a)$を最小にするため，

$$b=a+h(a)$$

とおき，

$$\int_a^{a+h(a)} f(t)\,dt=\alpha'\ (\text{一定})\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\text{ここで}\quad f(t)=e^{-\frac{t^2}{2}},\qquad \alpha'=\alpha\sqrt{2\pi}$$

を満たす最小の$h(a)$を求める。

(1)式をaについて微分すると，

$$f(a+h(a))(1+h'(a))-f(a)=0$$

$h'(a)=0$であるから，

$$f(a+h(a))=f(a)$$

$f(t)$は左右対称であるから$a=-b$となるよう選べばよい。

3. $\overline{X}$を大きさnの標本平均として，

$$P_r\left(|\overline{X}-\mu|\geqq\frac{1}{4}\sigma\right)\leqq 0.05$$

となるようなnを求めればよい。

ここで $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ が $N(0,1)$ に従うことと，（注）より，

$$P_r\left(\frac{|\overline{X}-\mu|}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geqq 1.96\right) = 0.05$$

となる。

よって，

$$\frac{1}{4}\sigma \geqq 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

を満たす n を求めると，

$$n \geqq \left(\frac{1.96}{\dfrac{1}{4}}\right)^2$$

$$= 61.4656$$

よって，62以上である。

4. 母集団メジアンを μ とし，y_r，y_{n-r+1} に対応する確率変数を Y_r，Y_{n-r+1} とするとき，

$$P_r(Y_r < \mu < Y_{n-r+1}) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{r-1}\binom{n}{k}$$

となることを証明すればよい。

ところで，

$$P_r(Y_r < \mu < Y_{n-r-1}) = 1 - P_r(Y_r \geqq \mu) - P_r(Y_{n-r+1} \leqq \mu)$$

であるが，Y_r 　μ となることは，n 個の観測値のうちで $n-r+1$ 個以上がメジアン μ より大となることを意味するから，

$$P_r(Y_r \geqq \mu) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=n-r+1}^{n}\binom{n}{k}$$

となる。また，$Y_{n-r+1} \leqq \mu$ となることは，$n-r+1$ 個以上がメジアン μ より小なることであるから同様に，

$$P_r(Y_{n-r+1} \leqq \mu) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=n-r+1}^{n}\binom{n}{k}$$

よって，

$$P_r(Y_r < \mu < Y_{n-r+1}) = 1 - \frac{1}{2^n}\sum_{k=n-r+1}^{n}\binom{n}{k} - \frac{1}{2^n}\sum_{k=n-r+1}^{n}\binom{n}{k}$$

$$= 1 - \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=n-r+1}^{n}\binom{n}{k}$$

$$= 1 - \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{r-1}\binom{n}{k}$$

5. 母集団の確率密度関数は，

$$f(x : \mu,\ \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

であり，尤度関数

$$L(\sigma^2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

を最大にする σ^2 の値を求めればよい。

$\sigma^2 = t$ とおき，(1)式の対数をとると，

$$\log L(t) = -\frac{n}{2}\log(2\pi t) - \frac{1}{2t}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

ここで,

$$\frac{d}{dt}\log L(t) = 0$$

より,

$$-\frac{n}{2}\frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = 0$$

を得，これを解くと,

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

となる。

次に,

$$E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i-\mu)^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}V(X_i) \qquad (V(\cdot)\text{ で分散を示す})$$

$$= \sigma^2 \qquad (\because\ V(X_i) = \sigma^2)$$

より不偏性が示された。