昭和52年度（問　題）

〔午前の部〕

1. 1回の試行で成功する確率を p，失敗する確率を $q\ (=1-p)$ とする。この試行を続けて試みるとき，始めて n 回成功するまでに要する試行の回数を X_n とする。

(i) X_n が k である確率 $P(X_n=k)$ を求めよ。($k=n,\ n+1,\ \cdots$)

(ii) X_1 の平均値 $E(X_1)$ および分散 $V(X_1)$ を求めよ。

ただし，毎回の試行の結果は互いに独立とする。

2. 確率変数 $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$ が互いに独立で，すべて正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとき，

$$Y=X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2$$

の積率母関数（または特性関数）を求め，これからその分布を求めよ。

3. n 個の数値を計算して小数点以下を四捨五入するときの丸めの誤差を $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$ とする。$X_i\,(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ は互いに独立で，それぞれ区間 $(-0.5,\ 0.5)$ の上の一様分布に従うとして，$n=75$ のとき，丸めの誤差の総和 $Y=X_1+X_2+\cdots+X_{75}$ が絶対値においてある正数 C を越えない確率がほぼ 0.95 であるという。

(i) $E(Y)$ および $V(Y)$ を求めよ。

(ii) C を求めよ。ただし，$\displaystyle\int_0^{1.96}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=0.475$ とする。

〔午後の部〕

4. 0および自然数を値にとる確率変数 X が

$$P(X=j\mid X\geqq j)=P(X=0)\quad(j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

なる性質を持つとき，X はどのような分布に従うか。

5. 完全な硬貨すなわち表が出る確率が $\frac{1}{2}$ の硬貨を n 回投げたとき表の出る回数を X とする。

$\left|\dfrac{X}{n}-\dfrac{1}{2}\right|\geqq 0.05$ となる確率を 0.01 以下にするには n をどうとればよいか。正規分布による近似を用いた場合の答とチェビシェフの不等式を用いた場合の答を示せ。

なお，Z が正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとき $P(|Z|>2.57)\fallingdotseq 0.01$ である。

昭和52年度（解答例）

〔午前の部〕

1.(i)　X_n が k であるためには，$(k-1)$ 回の試行で $(n-1)$ 回成功し，k 回目の試行が成功すればよいから，

$$P(X_n=k)=\binom{k-1}{n-1}p^{n-1}q^{(k-1)-(n-1)}\times p=\binom{k-1}{n-1}p^n q^{k-n}$$

(ii)　$$E(X_1)=p+2pq+3pq^2+\cdots+kpq^{k-1}+\cdots$$

$$=p(1+2q+3q^2+\cdots+kq^{k-1}+\cdots)$$

$$=p\cdot\frac{d}{dq}(q+q^2+q^3+\cdots+q^k+\cdots)$$

$$=p\cdot\frac{d}{dq}\left(\frac{q}{1-q}\right)=p\cdot\frac{1}{(1-q)^2}=\frac{1}{p}$$

$$V(X_1)=E(X_1^2)-(E(X_1))^2$$

$$=p+4pq+9pq+\cdots+k^2pq^{k-1}+\cdots-\frac{1}{p^2}$$

$$=p(1+4q+9q^2+\cdots+k^2q^{k-1}+\cdots)-\frac{1}{p^2}$$

$$=p\cdot\frac{d}{dq}(q+2q^2+3q^3+\cdots+kq^k+\cdots)-\frac{1}{p^2}$$

$$=p\cdot\frac{d}{dq}\left(\frac{q}{(1-q)^2}\right)-\frac{1}{p^2}=p\cdot\frac{1+q}{(1-q)^3}-\frac{1}{p^2}=\frac{q}{p^2}$$

2.　確率変数 X_k^2 の $m.\ g.\ f.$ は，

$$\phi(\theta)=E(e^{\theta X_k^2})=\int_{-\infty}^{\infty}e^{\theta x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(1-2\theta)x^2}dx \qquad (*)$$

θ が原点の近傍にあるとき（$\theta<\frac{1}{2}$ のとき），$\sqrt{1-2\theta}\ x=u$ とおくと，

$$(*)=(1-2\theta)^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du=(1-2\theta)^{-\frac{1}{2}}$$

X_1^2, X_2^2, …, X_n^2 は互いに独立であるから，Y の $m.\ g.\ f.$ は，

$$\Phi(\theta)=\left\{\phi\,(\theta)\right\}^n=(1-2\theta)^{-\frac{n}{2}}$$

これは，自由度 n の χ^2 分布である。

3.(i)　$E(X_i)=0$ より $E(Y)=0$

$$V(X_i)=\frac{1}{12}\ \text{より}\ V(Y)=\frac{75}{12}=\frac{25}{4}$$

(ii)　$P(-C<X_1+X_2+\cdots+X_{75}<C)=P\left(-\frac{2}{5}C<\dfrac{Y-0}{\sqrt{\frac{25}{4}}}<\frac{2}{5}C\right)$

$$\fallingdotseq\int_{-\frac{2}{5}c}^{\frac{2}{5}c}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx=0.95$$

これより $\frac{2}{5}C=1.96$　　　$\therefore C=\frac{5}{2}\times1.96=4.9$

〔午後の部〕

4.　$P(X=j\mid X\geqq j)=\dfrac{P(X=j\text{かつ}X\geqq j)}{P(X\geqq j)}=\dfrac{P(X=j)}{P(X\geqq j)}$

$=\dfrac{f(j)}{f(j)+f(j+1)+\cdots}$　（$P(X=j)=f(j)$ とおいた）

$\therefore\ \dfrac{f(j)}{f(j)+f(j+1)+\cdots}=f(0)=\dfrac{f(j+1)}{f(j+1)+f(j+2)+\cdots}$

$=\dfrac{f(j)-f(j+1)}{f(j)}$　$\left(\text{一般に}\ \dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\ \text{ならば}\ \dfrac{a-c}{b-d}=\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\right)$

すなわち，$\dfrac{f(j+1)}{f(j)}=1-f(0)$　　$(j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$

$\therefore\ f(j)=f(0)\left\{1-f(0)\right\}^j$　$(j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$

これは幾何分布である。

5.　X は $B_i\left(n,\ \frac{1}{2}\right)$ に従うので，$E\left(\frac{X}{n}\right)=\frac{1}{2}$，$\sigma^2\left(\frac{X}{n}\right)=\frac{1}{4n}$

よって，正規分布による近似を用いるときには $\frac{X}{n}$ が $N\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4n}\right)$ に従うと考えれば

よい。

よって， $0.05 \geqq 2.57\sqrt{\frac{1}{4n}}$ より $n \geqq 661$

次に，チェビシェフの不等式は，

$$P\left(\left|\frac{X}{n}-\frac{1}{2}\right| \geqq k\sigma\right) \leqq \frac{1}{k^2}$$

よって， $k\sigma = \frac{k}{\sqrt{4n}} = 0.05$ すなわち $k = 0.05\sqrt{4n}$ とおいて，

$$\frac{1}{k^2} \leqq 0.01 \text{ より } n \geqq 10{,}000$$