昭和52年度（問　題）

〔午前の部〕

1. n年払込終身保険（保険金期末払）で，契約後n年までの間に死亡した場合には死亡した年度の期末責任準備金を加算して支払う保険の，年払平準純保険料を求めよ。

2. 次の結婚死亡表の記号を用いて，各問の率を求める算式を記せ。

年齢 x	x歳における生存数		x歳と$x+1$歳間における減少数		
	独身男子数 $(bl)_x$	有妻男子数 $(ml)_x$	独身男子死亡数 $(bd)_x$	独身男子結婚数 $(bm)_x$	有妻男子死亡数 $(md)_x$
…	………	………	………	………	………
…	………	………	………	………	………
			………	………	

(1) x歳の独身男子が未婚のままで$x+1$歳まで残存しない率

(2) x歳の独身男子の死亡率

(3) x歳の独身男子の結婚率

(4) x歳の独身男子の中央死亡率

(5) x歳の独身男子の中央結婚率

3. $a_{\overline{n}|}$を既知としてその利率iを求めたい。年金現価表によると$a_{\overline{n}|}$に最も近い年金現価は$a'_{\overline{n}|}$でありその利率はi'である。このとき，iは次の式で近似されることを証明せよ。

$$i \fallingdotseq i' + i' \frac{\dfrac{1}{a_{\overline{n}|}} - \dfrac{1}{a'_{\overline{n}|}}}{\dfrac{1}{a'_{\overline{n}|}} - \dfrac{n}{(1+i')^{n+1}(a'_{\overline{n}|})^2}}$$

〔午後の部〕

4. 契約時年齢x歳の被保険者が，保険期間中に死亡したときは，年金受取人（契約時年齢y歳）に年金額を1とするm年保証終身年金を支払い，また保険期間満了時まで生存したときは既払込純保険料合計額を支払う保険期間n年の保険がある。

(1) 年払平準純保険料を求めよ。

(2) t年経過時の純保険料式責任準備金を求めよ。

5. 予定死亡率を変更しないで予定利率を引き上げたとき，普通終身保険（保険金期末払）の年払純保険料は低下することを示せ。ただし，予定死亡率は年齢の増加とともに単調に増加するものとする。

昭和52年度（解答例）

1.　x 歳加入としたときの求める年払平準純保険料を $\tilde{P}_x$ とし，第 t 保険年度末保険料積立金を ${}_t\tilde{V}_x$ とすると，Fackler の再帰方程式により，

$$({}_t\tilde{V}_x + \tilde{P}_x)\cdot(1+i) = {}_{t+1}\tilde{V}_x + q_{x+t}\cdot\{(1+{}_{t+1}\tilde{V}_x) - {}_{t+1}\tilde{V}_x\}$$

$$= {}_{t+1}\tilde{V}_x + q_{x+t} \qquad (t < n) \quad \cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

ここに，i は予定利率，q_{x+1} は $x+t$ 歳の予定死亡率である。

(1)の両辺に $(1+i)^{n-t-1}$ を乗じて $t=0$ から $t=n-1$ まで辺々加えると，

$$\sum_{t=0}^{n-1}({}_t\tilde{V}_x + \tilde{P}_x)\cdot(1+i)^{n-t} = \sum_{t=0}^{n-1}({}_{t+1}\tilde{V}_x + q_{x+t})\cdot(1+i)^{n-t-1}$$

これを変形すると，

$$\sum_{t=0}^{n-1}{}_t\tilde{V}_x\cdot(1+i)^{n-t} + \tilde{P}_x\cdot\sum_{t=0}^{n-1}(1+i)^{n-t}$$

$$= \sum_{t=0}^{n-1}{}_{t+1}\tilde{V}_x\cdot(1+i)^{n-(t+1)} + \sum_{t=0}^{n-1}q_{x+t}\cdot(1+i)^{n-t-1}$$

しかるに，${}_0\tilde{V}_x = 0$，${}_n\tilde{V}_x = A_{x+n}$ であるから $\sum_{k=x}^{\omega-1}v^{k+1}q_k = M'_x$ とおくと，

$$\tilde{P}_x\cdot\ddot{s}_{\overline{n}|} = A_{x+n} + (1+i)^{x+n}\cdot(M'_x - M'_{x+n})$$

$$\therefore\ \tilde{P}_x = \frac{1}{\ddot{s}_{\overline{n}|}}\{A_{x+n} + (1+i)^{x+n}\cdot(M'_x - M'_{x+n})\}$$

2.　(1) $1-\dfrac{(bl)_{x+1}}{(bl)_x}$　(2) $\dfrac{(bd)_x}{(bl)_x - \frac{1}{2}(bm)_x}$　(3) $\dfrac{(bm)_x}{(bl)_x - \frac{1}{2}(bd)_x}$

(4) $\dfrac{(bd)_x}{(bl)_x - \frac{1}{2}(bd)_x - \frac{1}{2}(bm)_x}$　(5) $\dfrac{(bm)_x}{(bl)_x - \frac{1}{2}(bd)_x - \frac{1}{2}(bm)_x}$

3.　$f(i) = \dfrac{1}{a_{\overline{n}|}}$ とおくと，$a_{\overline{n}|} = \dfrac{1-v^n}{i}$ であるから，

$$f'(i) = \left(\frac{i}{1-v^n}\right)' = \frac{1-v^n-i\cdot(-n\cdot v^{n-1})(v)'}{(1-v^n)^2}$$

$$= \frac{1-v^n-i\cdot(-n\cdot v^{n-1})(-v^2)}{(1-v^n)^2} = \frac{1-v^n-n\cdot i\cdot v^{n+1}}{(1-v^n)^2} \cdots\cdots\cdots\cdots\quad (1)$$

いま， $i=i'+\Delta i$ とすると， Δi は微小なので次の式が成り立つ。

$$f(i) \fallingdotseq f(i')+f'(i')\cdot\Delta i \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad (2)$$

他方， $f(i')=\dfrac{1}{a'_{\overline{n}|}}=\dfrac{i'}{1-v'^n}$ より， $1-v'^n=\dfrac{i'}{f(i')}$ であるから(1)より，

$$f'(i') = \frac{\dfrac{i'}{f(i')}-n\cdot i'\cdot v'^{n+1}}{\dfrac{i'^2}{f(i')^2}} = \frac{f(i')-n\cdot v'^{n+1}f(i')^2}{i'} \cdots\cdots\cdots\quad (3)$$

(2)，(3)より，

$$\Delta i \fallingdotseq \frac{1}{f'(i')}\quad (f(i)-f(i')) = i'\cdot\frac{f(i)-f(i')}{f(i')-n\cdot v'^{n+1}f(i')^2}$$

$$= i'\cdot\frac{\dfrac{1}{a_{\overline{n}|}}-\dfrac{1}{a'_{\overline{n}|}}}{\dfrac{1}{a'_{\overline{n}|}}-\dfrac{n}{(1+i')^{n+1}\cdot(a'_{\overline{n}|})^2}}$$

したがって，

$$i=i'+\Delta i$$

$$\fallingdotseq i'+i'\cdot\frac{\dfrac{1}{a_{\overline{n}|}}-\dfrac{1}{a'_{\overline{n}|}}}{\dfrac{1}{a'_{\overline{n}|}}-\dfrac{n}{(1+i')^{n+1}\cdot(a'_{\overline{n}|})^2}}$$

4. 被保険者が死亡したときに支払う年金が，死亡年度の年度末に支払開始されるものとする。死亡時に即時に開始されるものとした場合も同様に考えればよい。

(1) 求める保険料をPとすれば，収支相等の原則から，

$$P\cdot\frac{N_x-N_{x+n}}{D_x} = \frac{1}{D_x}\left\{\sum_{t=0}^{n-1}(\ddot{a}_{\overline{m}|}+{}_tp_y\cdot{}_{m|}\ddot{a}_{y+t})\cdot C_{x+t}+n\cdot P\cdot D_{x+n}\right\}$$

$$\therefore\ P\cdot(N_x-N_{x+n}-nD_{x+n}) = \sum_{t=0}^{n-1}(\ddot{a}_{\overline{m}|}+(1+i)^t\cdot{}_{m+t|}\ddot{a}_y)\cdot C_{x+t}$$

$$\therefore\ P=\frac{\sum_{t=0}^{n-1}(\ddot{a}_{\overline{m}|}+(1+i)^t\cdot{}_{m+t|}\ddot{a}_y)\cdot C_{x+t}}{N_x-N_{x+n}-n\,D_{x+n}}$$

ここに，i は予定利率を表わす。

(2)　i）保険料払込中

$$ {}_tV = \left\{ \sum_{l=t}^{n-1} \left(\ddot{a}_{\overline{m}|} + (1+i)^l \cdot {}_{m+l|}\ddot{a}_y \right) \cdot C_{x+l} + n \cdot P \cdot D_{x+n} \right\} / D_{x+t} - P \cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} $$

ii）年金支払開始後

第 t' 保険年度に被保険者が死亡したとし，$t'' = t - t'$ とおくと，

(イ)　$0 \leqq t'' \leqq m$ のとき，

$$ {}_tV = \ddot{a}_{\overline{m-t''}|} + {}_tp_y \cdot {}_{m-t''|}\ddot{a}_{y+t} $$

$$ = \ddot{a}_{\overline{m-t''}|} + (1+i)^t \cdot {}_{m-t'|}\ddot{a}_y $$

(ロ)　$m < t''$ のとき，

$$ {}_tV = \ddot{a}_{y+t} $$

5. 予定利率を i とすると，x 歳加入の年払純保険料 P_x および 第 t 保険年度末保険料積立金 ${}_tV_x$ は，次の再帰方程式をみたす。

$$ ({}_tV_x + P_x) \cdot (1+i) = (1-q_{x+t})\,{}_{t+1}V_x + q_{x+t} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1) $$

予定利率を i から $i+\Delta i$ に引き上げたときの年払純保険料，第 t 保険年度末保険料積立金をそれぞれ $P_x + \Delta P$，${}_tV_x + \Delta V_t$ とすれば，同様に，

$$ ({}_tV_x + \Delta V_t + P_x + \Delta P)(1+i+\Delta i) = (1-q_{x+t}) \cdot ({}_{t+1}V_x + \Delta V_{t+1}) + q_{x+t} \cdots \quad (2) $$

が成立する。

(2)式より(1)式を引くと，

$$ (\Delta V_t + \Delta P) \cdot (1+i) + ({}_tV_x + \Delta V_t + P_x + \Delta P) \cdot \Delta i = (1-q_{x+t}) \cdot \Delta V_{t+1} $$

$$ \therefore \quad (\Delta V_t + \Delta P) \cdot (1+i) - (1-q_{x+t}) \cdot \Delta V_{t+1} = -({}_tV_x + \Delta V_t + P_x + \Delta P) \cdot \Delta i $$

$$ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3) $$

(3)式の左辺に vD_{x+t} を乗じ，$t=0$ から $t=\omega-x$ まで加えると，

$$ \sum_{t=0}^{\omega-x} \left\{ (\Delta V_t + \Delta P) \cdot D_{x+t} - \frac{l_{x+t+1}}{l_{x+t}} \cdot v \cdot D_{x+t} \cdot \Delta V_{t+1} \right\} $$

$$ = \sum_{t=0}^{\omega-x} (\Delta V_t \cdot D_{x+t} - \Delta V_{t+1} \cdot D_{x+t+1}) + \Delta P \cdot \sum_{t=0}^{\omega-x} D_{x+t} $$

$$ = \Delta P \cdot N_x \qquad (\because \ \Delta V_0 = \Delta V_{\omega+1} = 0) $$

よって，

$$ \Delta P \cdot N_x = -\Delta i \cdot \sum_{t=0}^{\omega-x} v D_{x+t} \cdot ({}_tV_x + \Delta V_t + P_x + \Delta P) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4) $$

(2)式より

$$ {}_tV_x + \varDelta V_t + P_x + \varDelta P = \frac{q_{x+t} + (1-q_{x+t})\cdot({}_{t+1}V_x + \varDelta V_{t+1})}{1+i+\varDelta i} > 0 $$

よって(4)式により $\varDelta P < 0$