昭和52年度（問　題）

〔午前の部〕

1. 契約時年齢 x 歳および $x+1$ 歳の普通終身保険（保険金期末払）の年払純保険料および予定利率 i を既知として，x 歳の生存率 p_x を求めよ。

2. ${}_tp_x \cdot \mu_{x+t} = a+b \cdot t$，$(0 \leqq t \leqq n,\ b \neq 0)$ として，x 歳の者の n 年間の完全平均余命を求めよ。

3. 契約時年齢 x 歳，n 年払込 n 年満期の養老保険（保険金期末払）を t 年経過時で，

 (1) 払済保険に変更した場合の保険金額

 (2) 延長保険に変更した場合の延長期間と生存保険金額

 (3) 払込期間を m 年に短縮した場合の変更後の年払平準保険料の額（変更時において一時に払い込む額は0とする。）

を求める算式を記せ。ただし，予定事業費率は用いないものとし，解約控除は0とする。

〔午後の部〕

4. 次の $\boxed{}$ を埋めよ。

(1) $${}_tV_{x:\overline{n}|} = \left(P_{x+t:\overline{n-t}|} - \boxed{}\right)\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$$

(2) $${}_tV_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x+t:\overline{n-t}|} - A_{x:\overline{n}|}}{1-\boxed{}}$$

(3) $${}_tV_{x:\overline{n}|} = \frac{P_{x:\overline{n}|} - \boxed{}}{{}_tE_x} \times \ddot{a}_{x:\overline{t}|}$$

(4) $${}_tV_{x:\overline{n}|} = 1 - \frac{\boxed{}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

5. (x)，(y)の２人を被保険者として，年金支払期間 n 年，年１回期始払，年金額を次のとおりとする年金の現価を求めよ。

・２人とも生存しているときの年金額………… S

・いずれか１人が生存しているときの年金額… $0.6\,S$

・２人とも死亡したときの以後の年金額……… $0.2\,S$

昭和52年度（解答例）

1.　$P_x = \dfrac{1}{\ddot{a}_x} - d$，$P_{x+1} = \dfrac{1}{\ddot{a}_{x+1}} - d$，$\ddot{a}_x = 1 + v \cdot p_x \cdot \ddot{a}_{x+1}$，$v = 1 - d$，$d = \dfrac{i}{1+i}$

であるから

$$p_x = \frac{\ddot{a}_x - 1}{v \cdot \ddot{a}_{x+1}} = \frac{\dfrac{1}{P_x + d} - 1}{v \cdot \dfrac{1}{P_{x+1} + d}} = \frac{(1 - d - P_x) \cdot (P_{x+1} + d)}{v \cdot (P_x + d)}$$

$$= \frac{v - P_x}{v} \cdot \frac{P_{x+1} + d}{P_x + d}$$

$$= \left\{1 - (1+i) \cdot P_x\right\} \cdot \frac{(1+i) \cdot P_{x+1} + i}{(1+i) \cdot P_x + i}$$

2.　$${}_t p_x \cdot \mu_{x+t} = \frac{l_{x+t}}{l_x} \cdot \left(-\frac{1}{l_{x+t}} \cdot \frac{d\,l_{x+t}}{dt}\right) = -\frac{1}{l_x} \cdot \frac{d\,l_{x+t}}{dt} = a + b \cdot t$$

$$\int \frac{1}{l_x} \cdot \frac{d\,l_{x+t}}{dt}\,dt = -\int (a + b \cdot t)\,dt$$

$$\therefore \frac{l_{x+t}}{l_x} = C - a \cdot t - \frac{b}{2} \cdot t^2 \quad (C\text{は積分定数})$$

ここで $t=0$ とおけば $C=1$ であるから

$$\frac{l_{x+t}}{l_x} = 1 - a \cdot t - \frac{b}{2} \cdot t^2$$

$$\therefore {}_t p_x = \frac{l_{x+t}}{l_x} = 1 - a \cdot t - \frac{b}{2} \cdot t^2$$

$$\therefore {}_n\mathring{e}_x = \int_0^n {}_t p_x\,dt = \int_0^n \left(1 - a \cdot t - \frac{b}{2} \cdot t^2\right) dt$$

$$= \left[t - \frac{a}{2} \cdot t^2 - \frac{b}{6} \cdot t^3\right]_0^n = n - \frac{a}{2} \cdot n^2 - \frac{b}{6} \cdot n^3$$

3.　(1)　${}_tV_{x:\overline{n|}} \,/\, A_{x+t:\overline{n-t|}}$

(2)　${}_tV_{x:\overline{n|}} > A^{\;1}_{x+t:\overline{n-t|}}$ のとき

延長保険の残余延長期間　　$n - t$

生存保険金額　　　　　　　$({}_tV_{x:\overline{n|}} - A_{x+t:\overline{n-t|}}^{\ 1}) \,/\, A_{x+t:\overline{n-t|}}^{\ \ \ \ 1}$

${}_tV_{x:\overline{n|}} \leqq A_{x+t:\overline{n-t|}}^{1}$ のとき

延長保険の残余延長期間

$${}_tV_{x:\overline{n|}} = A_{x+t:\overline{T|}}^{1} \quad なる\ T$$

生存保険金額　0

(3)　$x+t$ 歳で $m-t$ 年払込 $n-t$ 年満期養老保険に加入した場合と比べると，当初契約の責準 ${}_tV_{x:\overline{n|}}$ を財源として，保険料に毎年充当できる額 ${}_tV_{x:\overline{n|}}/\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t|}}$ だけ負担が少ない。

よって，${}_{m-t}P_{x+t:\overline{n-t|}} - {}_tV_{x:\overline{n|}}/\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t|}}$ である。

〔別解〕求める保険料をPとすると，収支相等の原則から

$$P\cdot{}_{t|}\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t|}} + P_{x:\overline{n|}}\cdot\ddot{a}_{x:\overline{t|}} = A_{x:\overline{n|}}$$

$$\therefore\ P\cdot{}_{t|}\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t|}} = A_{x:\overline{n|}} - \frac{A_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}\cdot\ddot{a}_{x:\overline{t|}} = A_{x:\overline{n|}}\cdot{}_{t|}\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}\cdot\frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}$$

$$\therefore\ P = \frac{A_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}\cdot\frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}}{\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t|}}} = P_{x:\overline{n|}}\cdot\frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}}{\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t|}}}$$

4.　(1)　$P_{x:\overline{n|}}$　　　　(2)　$A_{x:\overline{n|}}$

(3)　$P_{x:\overline{t|}}^{1}$　　　　(4)　$\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}$

5.　(x)，(y)ともに生存している場合に対する支払の現価は

$$S\cdot\ddot{a}_{xy:\overline{n|}}$$

(x)が生存し，(y)が死亡している場合に対する支払の現価は

$$0.6S\cdot(\ddot{a}_{x:\overline{n|}} - \ddot{a}_{xy:\overline{n|}})$$

(y)が生存し，(x)が死亡している場合に対する支払の現価は

$$0.6S\cdot(\ddot{a}_{y:\overline{n|}} - \ddot{a}_{xy:\overline{n|}})$$

(x)，(y)ともに死亡している場合に対する支払の現価は

$$0.2S\cdot(\ddot{a}_{\overline{n|}} - \ddot{a}_{x:\overline{n|}} - \ddot{a}_{y:\overline{n|}} + \ddot{a}_{xy:\overline{n|}})$$

求める年金の現価は以上の合計であるから

$$S\cdot\ddot{a}_{xy:\overline{n|}} + 0.6S\cdot(\ddot{a}_{x:\overline{n|}} - \ddot{a}_{xy:\overline{n|}}) + 0.6S\cdot(\ddot{a}_{y:\overline{n|}} - \ddot{a}_{xy:\overline{n|}})$$

$$+\ 0.2S\cdot(\ddot{a}_{\overline{n|}} - \ddot{a}_{x:\overline{n|}} - \ddot{a}_{y:\overline{n|}} + \ddot{a}_{xy:\overline{n|}})$$

$$=\ 0.2S\cdot\ddot{a}_{\overline{n|}} + 0.4S\cdot\ddot{a}_{x:\overline{n|}} + 0.4S\ddot{a}_{y:\overline{n|}}$$