昭和51年度（問　題）

午前の部

1. ある選挙で，有権者の数は充分多いものとする。A候補の支持率を信頼係数99％で，誤差が1％以内になるように推定したい。標本の大きさはどれだけあればよいか。

ただし，Zが標準正規分布N(0, 1)をするとき $P(|Z|>2.58)\fallingdotseq 0.01$

2. 1つの銅貨を10,000回投げて，表の出た回数をXとするとき。このとき

(1) 仮説 Ho:「この銅貨の表の出る確率は$\frac{1}{2}$である。」を有意水準5％で検定せよ。

(2) 仮説 Hp:「この銅貨の表の出る確率はpである。」が正しいとき，この検定によってHoの棄却されない確率を p = 0.48, 0.49, 0.50, 0.51, 0.52,について近似的に求め，グラフに示せ。

ただし，ZがN(0,1)に従うとき $P(|Z|>2)\fallingdotseq 0.05$

3. X_1，X_2，…，X_nを，平均μ，分散σ^2の母集団からの独立な標本とするとき，

$$S^2=\frac{1}{n-1}\Sigma(X_i-\overline{X})^2 \qquad \overline{X}=\frac{1}{n}\Sigma X_i$$

は母分散σ^2の不偏な推定量であることを示せ。

午後の部

4. 母集団がガンマ分布

$$\text{密度関数} f(x;\alpha,\beta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}} & x>0\\ 0 & x\leqq 0 \quad (\alpha,\beta>0)\end{cases}$$

に従うとき，

(1) 標本平均 $\overline{X}=\frac{1}{n}\Sigma X_i$の分布を求めよ。

(2) αを既知として，βの最尤推定量$\hat{\beta}(X_1, X_2, \cdots X_n)$を求めよ。

5. (1) ポワソン分布をする母集団からの標本X_1, …X_nを用いて母集団分布のパラメーターλの最尤推定量を求め，(2)この最尤推定量が(a)不偏推定量(b)有効推定量であることを示せ。

ただしZを任意のλの不偏推定量とするとき，次の不等式(クラーメル・ラオの不等式)が成立することを用いよ。

$$V(Z) \geq \frac{1}{n E\left(\left\{\frac{\partial \log f(X, \lambda)}{\partial \lambda}\right\}^2\right)}$$

ただし$f(x, \lambda)$は確率関数，すなわち$P(X = x)$；$x = 0, 1, 2, \cdots$。

昭和51年度（解答例）

午前の部

1. 支持率 Pの，信頼係数99%の信頼区間は，$\hat{P}$ を標本の支持率として

$$\left(\hat{P}-2.58\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}},\quad \hat{P}+2.58\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}\right)$$

従って，誤差 1 %以内とするには

$$2.58\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}\leq 0.01$$

これから　　$n \geq (2.58\times100)^2\times\hat{P}(1-\hat{P})$

$\hat{P}(1-\hat{P})$ は $\hat{P}=0.5$ のとき最大値をとるから

$$n \geq (2.58\times100)^2\times0.5\times0.5$$

すなわち　　$n \geq 16,641$　　であればよい。

2. (1)　両側検定を用いる。仮説 H_0 が正しいとき，H_0 が棄却される確率が 5 %になるようにすればよい。H_0 が正しいとき表の出る回数 X の分布は，

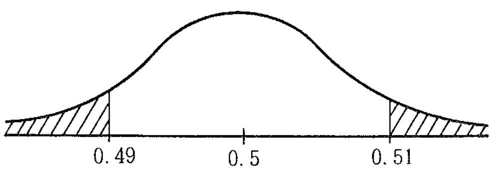
$$\mu=10,000\times\frac{1}{2}=5,000\ ,\qquad \sigma^2=10,000\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=2,500$$ の正規分布

で近似できる。したがって　$\frac{X}{10,000}=Y$　とおくと，Y の分布は $\mu=0.5$

$\sigma^2=\frac{2,500}{10,000^2}=\frac{0.25}{10,000}$　すなわち　$\sigma=0.005$ の正規分布で近似される。

故に，$|Y-0.5|>0.01(=2\sigma)$ のとき仮説 H_0 を棄却することにすれば，有意水準 5 %の両側検定となる。

即ち図の斜線の部分を棄却域とする。



(2)　$P=0.48$ のとき Y の分布は $\mu=0.48$，$\sigma^2=\frac{0.48\times0.52}{10,000}\fallingdotseq\frac{0.25}{10,000}$

すなわち　$\sigma \fallingdotseq 0.005$　の正規分布で近似される。

このとき H_0 が棄却されない確率は

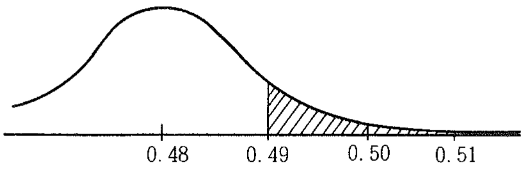
$$P(0.49 \leq Y \leq 0.51) = P(0.49 \leq Y) - P(0.51 \leq Y)$$

で，$P(0.49 \leq Y) = P(2\times 0.005 \leq Y-0.48) = P(2\sigma \leq Y-\mu) = \dfrac{0.05}{2}$

$$= 0.025$$

$P(0.51 \leq Y) = P(6\times 0.005 \leq Y-0.48) = P(6\sigma \leq Y-\mu)$　は非常に小さい。

したがって，仮説 H_0 の棄却されない確率は 0.025



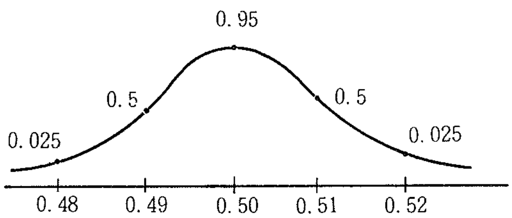
同様にして，H_0 が棄却されない確率は

$P=0.49$ のとき 0.5,

$P=0.51$ のとき 0.5，$P=0.52$ のとき 0.025

$P=0.5$ のときは $1-0.05=0.95$

これをグラフにすると右の通り。



3.　$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} X_i\overline{X} + n\overline{X}^2\right)$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{j=1}^{n} X_j + n\cdot\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{j=1}^{n} X_j\right)$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{j=1}^{n} X_j\right)$$

$$= \frac{1}{n-1}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{n-1}{n} X_i^2 - \frac{1}{n} X_i \sum_{i\neq j} X_j\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n} X_i^2 - \frac{1}{n} X_i^2\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{n-1}{n} X_i^2 - \frac{1}{n} X_i \sum_{j\neq i} X_j\right)$$

$$\therefore\ E(S^2) = E\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}\left(\frac{n-1}{n} X_i^2 - \frac{1}{n} X_i \sum_{j\neq i} X_j\right)\right)$$

$$= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{n-1}{n}\mathrm{E}(\mathrm{X}_i{}^2) - \frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}\mathrm{E}(\mathrm{X}_i\,\mathrm{X}_j)$$

$j \neq i$ のとき X_i と X_j は独立だから　$\mathrm{E}(\mathrm{X}_i\ \mathrm{X}_j) = \mathrm{E}(\mathrm{X}_i)\mathrm{E}(\mathrm{X}_j) = \mu^2,$

$\mathrm{E}(\mathrm{X}_i{}^2) = \mu^2 + \sigma^2$

$$\therefore\ \mathrm{E}(\mathrm{S}^2) = n\cdot\frac{1}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot(\sigma^2+\mu^2) - \frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{n}\cdot n\cdot(n-1)\mu^2 = \sigma^2$$

故に S^2 は σ^2 の不偏推定量。

午後の部

4.(1)　$\mathrm{X}_1+\mathrm{X}_2$ の分布の確率密度関数 $f_2(x)$ は

$$f_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1)f(x-x_1)\,dx_1$$

$$= \int_0^x \frac{x_1{}^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\,\beta^{\alpha}}\cdot e^{-\frac{x_1}{\beta}}\cdot\frac{(x-x_1)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}\cdot e^{-\frac{x-x_1}{\beta}}\,dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(2\alpha)\beta^{2\alpha}}x^{2\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}}$$

よって $\mathrm{X}_1+\cdots+\mathrm{X}_n$ の確率密度関数は帰納法により

$$f_n(x) = \int_0^{\infty} f_{n-1}(x')f(x-x')\,dx' = \frac{x^{n\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}}}{\Gamma(n\alpha)\beta^{n\alpha}}$$

従って $\overline{\mathrm{X}} = \dfrac{\mathrm{X}_1+\cdots+\mathrm{X}_n}{n}$ の確率密度関数は

$$f(\overline{x}) = \frac{(nx)^{n\alpha-1}}{\Gamma(n\alpha)\beta^{n\alpha}}e^{-\frac{nx}{\beta}}\cdot n$$

(2)　$(\mathrm{X}_1,\cdots,\mathrm{X}_n)$ の確率密度関数を β の尤度関数 $l(\beta)$ とおいて,

$$l(\beta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\alpha,\beta) = \frac{1}{\Gamma^n(\alpha)\beta^{n\alpha}}\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\alpha-1}exp\left(-\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}log\,l(\beta) = -\frac{n\alpha}{\beta}+\frac{1}{\beta^2}\sum x_i = 0$$

これから $\widehat{\beta} = \dfrac{1}{\alpha n}\sum x_i = \dfrac{\overline{x}}{\alpha}$　が β の最尤推定量

5. (1) 母集団の確率分布は $P(X=x_i)=f(x_i;\lambda)=\dfrac{\lambda^{x_i}e^{-\lambda}}{x_i!}$ $(x_i=0,1,2,\cdots)$

尤度関数は $l(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\lambda)=\left(\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i}\cdot e^{-n\lambda}\right)\Big/\prod_{i=1}^{n}x_i!$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\log l(\lambda)=\frac{\partial}{\partial\lambda}\left\{(\sum x_i)\log\lambda-n\lambda-\log(\prod x_i!)\right\}$$

$$=\frac{1}{\lambda}\sum x_i-n$$

したがって $l(\lambda)$ を最大にする λ の値は $\widehat{\lambda}=\dfrac{1}{n}\sum x_i=\overline{X}$ で，これが λ の

最尤推定量となる。

(2)(a) $E(\widehat{\lambda})=\dfrac{1}{n}\sum E(X_i)=\dfrac{n\lambda}{n}=\lambda$ だから $\widehat{\lambda}$ は不偏推定量

(b) クラーメル・ラオの不等式において

左辺 $=V(\overline{X})=\dfrac{1}{n^2}\sum V(X_i)=\dfrac{n\lambda}{n^2}=\dfrac{\lambda}{n}$

$$右辺=\frac{1}{nE\left(\left\{\dfrac{\partial\log f(X,\lambda)}{\partial\lambda}\right\}^2\right)}=\frac{1}{nE\left(\left\{\dfrac{\partial}{\partial\lambda}(X\log\lambda-\lambda-\log X!)\right\}^2\right)}$$

$$=\frac{1}{nE\left(\left\{\dfrac{X}{\lambda}-1\right\}^2\right)}=\frac{\lambda^2}{nE(\{X-\lambda\}^2)}=\frac{\lambda^2}{nV(X)}=\frac{\lambda}{n}$$

で等号が成立するから，$\overline{X}$ は λ の有効推定量。