昭和51年度（問　題）

午前の部

1. 確率変数X，Yの同時確率密度関数が

$$f(x,y)=e^{-(x+y)} \qquad (x>0,\ y>0)$$
$$=0 \qquad (その他)$$

のとき，次の確率を求めよ。

(1) $P(1<X+Y<2)$

(2) $P(X<Y \mid X<2Y)$

2. 非負の整数値をとる確率変数Xの平均値E（X）が存在すれば

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty} P(X\geqq k)$$

となることを証明せよ。

3. 確率変数Xの分布関数を$F(x)$とする。$F(x)=\frac{1}{2}$を満足する点$x=m_e$をこの分布の中央値（median）と呼ぶ。点cの周りの1次の絶対積率$E(|X-c|)$は，$c=m_e$のとき最小であることを示せ。

午後の部

4. n個のボールをn個の箱にランダムに入れた場合，ちょうど2個の箱が空になる確率を求めよ。ただし$n\geqq 5$とする。

5. (1) 次の確率変数Xの積率母関数または，特性関数を求めよ。

(a) Xがポワソン分布$P(k;\lambda)$にしたがうとき。

(b) Xが正規分布$N(\mu,\sigma^2)$にしたがうとき。

(2) 次の確率変数Xの積率母関数または特性関数を求め，これからその分布を求めよ。

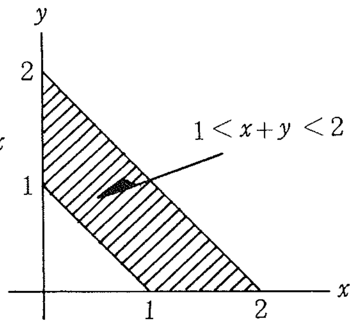
(a) $X=X_1+X_2$で，確率変数X_1，X_2は独立でそれぞれポワソン分布$P(k;\lambda_1)$，$P(k;\lambda_2)$にしたがうとき。

(b) $X=a_1X_1+a_2X_2+\cdots+a_nX_n+b$（$a_1,\cdots,a_n$，bは定数）で確率変数$X_1$，$X_2\cdots$，$X_n$は独立でそれぞれ正規分布$N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$N(\mu_2,\sigma_2^2)$，…，$N(\mu_n,\sigma_n^2)$にしたがうとき。

昭和51年度（解答例）

午前の部

1. (1) $P(1<X+Y<2)$



$$=\iint_{\substack{1<x+y<2\\x>0,\ y>0}} e^{-(x+y)}\,dxdy$$

$$=\int_0^1\left(\int_{y=1-x}^{2-x} e^{-(x+y)}\,dy\right)dx+\int_1^2\left(\int_{y=0}^{2-x} e^{-(x+y)}\,dy\right)dx$$

$$=\int_0^1\left[-e^{-(x+y)}\right]_{y=1-x}^{2-x}dx+\int_1^2\left[-e^{-(x+y)}\right]_{y=0}^{2-x}dx$$

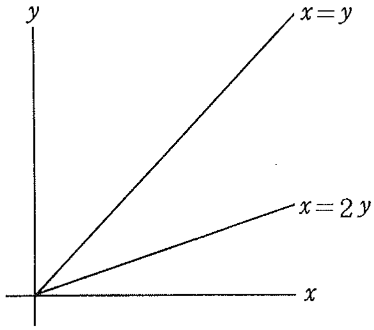
$$=\int_0^1\left(-e^{-(x+2-x)}+e^{-(x+1-x)}\right)dx+\int_1^2\left(-e^{-(x+2-x)}+e^{-x}\right)dx$$

$$=\int_0^1\left(-e^{-2}+e^{-1}\right)dx+\int_1^2\left(-e^{-2}+e^{-x}\right)dx$$

$$=\quad e^{-1}-2e^{-2}+\left[-e^{-x}\right]_1^2$$

$$=\quad 2e^{-1}-3e^{-2}$$

(2) $P(X<Y\,|\,X<2Y)$



$$=\frac{P(X<Y \text{かつ} X<2Y)}{P(X<2Y)}=\frac{P(X<Y)}{P(X<2Y)}$$

$$P(X<Y)=\int_0^\infty\int_x^\infty e^{-(x+y)}\,dydx=\int_0^\infty\left[-e^{-(x+y)}\right]_{y=x}^{\infty}dx$$

$$=\int_0^\infty e^{-2x}\,dx=\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^\infty=\frac{1}{2}$$

$$P(X<2Y)=\int_0^\infty\int_{\frac{x}{2}}^\infty e^{-(x+y)}\,dydx=\int_0^\infty[-e^{-(x+y)}]_{\frac{x}{2}}^\infty\,dx$$

$$=\int_0^\infty e^{-\frac{3}{2}x}\,dx=[-\frac{2}{3}e^{-\frac{3}{2}x}]_0^\infty=\frac{2}{3}$$

$$\therefore\ P(X<Y\mid X<2Y)=\frac{1}{2}\Big/\frac{2}{3}=\frac{3}{4}$$

2. $\sum_{k=1}^\infty P(X\geqq k)=\sum_{k=1}^\infty\sum_{j=k}^\infty P(X=j)$

この二重級数の各項は正だから和の順序を交換できる。故に，

$$\sum_{k=1}^\infty\sum_{j=k}^\infty P(X=j)$$

$$\begin{aligned}=P(X=1)+P(X=2)+\cdots+P(X=k)+&\cdots\cdots\\ +P(X=2)+\cdots+P(X=k)+&\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\\ +P(X=k)+&\cdots\cdots\\ &\cdots\cdots\end{aligned}$$

$$=\sum_{k=1}^\infty kP(X=j)=E(X)$$

3. ルベッグ・スチールチェス積分を用いれば，$m_e<c$ のとき

$$E(|X-c|)=\int_{-\infty}^\infty|x-c|\,dF(x)$$

$$=\int_{-\infty}^{m_e}|x-c|\,dF(x)+\int_{m_e}^{c}|x-c|\,dF(x)+\int_c^\infty|x-c|\,dF(x)$$

$$=\int_{-\infty}^{m_e}(|x-m_e|+c-m_e)\,dF(x)+\int_{m_e}^{c}(|x-m_e|+c+m_e-2x)\,dF(x)$$

$$+\int_c^\infty\{|x-m_e|-(c-m_e)\}\,dF(x)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |x-m_e|\, dF(x) + \int_{-\infty}^{m_e} (c-m_e)\, dF(x) + \int_{m_e}^{c} (c+m_e-2x)\, dF(x) - \int_{c}^{\infty} (c-m_e)\, dF(x)$$

$$\geq \int_{-\infty}^{\infty} |x-m_e|\, dF(x) + \int_{-\infty}^{m_e} (c-m_e)\, dF(x) - \int_{m_e}^{\infty} (c-m_e)\, dF(x) = E(|X-m_e|)$$

$c < m_e$ のときも同様。

ルベッグ・スチールチェス積分を用いずに証明するには，Xが確率密度函数 $f(x)$ をもつ場合は

$$E(|X-c|) = \int_{-\infty}^{\infty} |x-c| f(x)\, dx$$ と書けば上と同様に，

Xが離散分布のときは，$E(|X-c|) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k |x_k - c|$ $(P_k = P(X = x_k))$

とおいて同じように証明できる。

午後の部

4. n個のボールをn個の箱に入れる仕方の数は n^n 。その内2個の箱が空になる場合の数は次のようにして計算できる。

(1) 空になる2つの箱のえらび方は ${}_nC_2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$

(2) n個のボールを残りのn－2個の箱に，1つも空でないように入れる仕方の数は

(a) 残りn－2箱の内，1箱に3個のボールが入っている場合の数

$$(n-2)\cdot {}_nC_3 \cdot (n-3)! = (n-2)\cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{3!} = \frac{n-2}{6}\cdot n!$$

(b) 残りn－2箱の内，2箱に各々2個のボールが入っている場合の数

$${}_{n-2}C_2 \cdot {}_nC_2 \cdot {}_{n-2}C_2 \cdot (n-4)!$$

$$= \frac{(n-2)(n-3)}{2}\cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4}\cdot (n-4)!$$

$$= \frac{(n-2)(n-3)}{8}\cdot n!$$

したがって，求める確率は

$$\left\{\frac{(n-2)(n-3)}{8}+\frac{(n-2)}{6}\right\}\cdot\frac{n(n-1)}{2}\cdot n!\Big/n^n$$

5. 積率母函数を用いると次の通り。

(1) (a) ポワソン分布の確率密度函数は

$$P_k=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

だから，積率母函数は

$$m(\theta)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{\theta k}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda\cdot e^{\theta})^k}{k!}e^{-\lambda e^{\theta}}\cdot e^{-\lambda+\lambda e^{\theta}}$$

$$=e^{-\lambda(1-e^{\theta})}$$

(b) 正規分布の確率密度函数は

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\ e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

だから，積率母函数は

$$m(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\theta x}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu-\sigma^2\theta)^2}\cdot e^{\mu\theta+\frac{\sigma^2}{2}\theta^2}dx$$

$$=e^{\mu\theta+\frac{\sigma^2}{2}\theta^2}$$

(2) (a) Xの積率母函数は

$$m_1(\theta)\cdot m_2(\theta)=e^{-\lambda_1(1-e^{\theta})}\cdot e^{-\lambda_2(1-e^{\theta})}=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)(1-e^{\theta})}$$

したがってXの分布はポワソン分布　　$P(k;\lambda_1+\lambda_2)$

(b)　　$a_1X_1=Y_1$，$a_2X_2=Y_2$，………，$Y=X-b=Y_1+Y_2+\cdots+Y_n$

とおくと，Y_1，……，Y_n の積率母函数は

$$m_i(\theta_i) = e^{\mu_i a_i \theta + \frac{\sigma_i^2 a_i^2}{2}\theta}$$

Yの積率母函数は　$\prod_{i=1}^{n} m_i(\theta) = e^{\Sigma \mu_i a_i \theta + \frac{\Sigma \sigma_i^2 a_i^2}{2}\theta}$

したがってYの分布は　$N(\mu, \sigma^2)$　ただし　$\mu = \Sigma \mu_i a_i$, $\sigma^2 = \Sigma \sigma_i^2 a_i^2$

だから，Xの分布は正規分布　$N(\mu + b, \sigma^2)$