昭和50年度　（問題）

午前の部

1. 生存函数 $S(x) = \frac{1}{100}(100 - x)$　$(0 \leqq x \leqq 100)$ が与えられたとき，次の各値を求めよ。

(1) ${}_tp_x$ ，　(2) μ_x ，　(3) $\mathring{e}_x$

2. 次式を証明せよ。

(1) $\frac{d\bar{a}_x}{di} = -v\,(\bar{I}\bar{a})_x$　(2) $\frac{d\bar{a}_x}{d\delta} = -(\bar{I}\bar{a})_x$

3. 保険期間 n 年の全期払の定期保険で，初年度の純保険料を P_1，第 t 年度の純保険料を $P_t = P_{t-1}(1 + \alpha_{t-1})$ のように，毎年保険料が α_t ($t = 1, 2, \cdots\cdots, n-1$) だけ増加する。一方，第1年度の死亡に対して年度末に1を支払い，第 t 年度の死亡に対して，第 t 年度末に $S_t = S_{t-1}(1 + \beta_{t-1})$ のように毎年保険金が β_t だけ増加する。

以上のような場合の初年度純保険料 P_1 を求める算式を導け。

午後の部

4. 次式を証明せよ。

(1) $\bar{A}^{\,1}_{x:\overline{n|}} = 1 - v^n\,{}_np_x - \delta\,\bar{a}_{x:\overline{n|}}$

(2) $\bar{A}_x = 1 - \delta\,\bar{a}_x$

(3) $\bar{A}_{x:\overline{n|}} = 1 - \delta\,\bar{a}_{x:\overline{n|}}$

〔問〕

5. 次の（　）を埋めよ。

(1) $\overset{\circ}{a}{}_{x}^{(m)} = a_{x}^{(m)} + \frac{1}{D_x}\int_0^\infty \overline{M}_{x+t}\, dt - \frac{1}{D_x}$ （　　　　　）

(2) $\overset{\circ}{a}{}_{x}^{(m)} \fallingdotseq a_{x}^{(m)} + \frac{1}{2m}\overline{A}_x -$ （　　　　　）

(3) $\overset{\circ}{a}{}_{x}^{(m)} \fallingdotseq a_x + \frac{m-1}{2m} +$ （　　　　　）

(4) $\overset{\circ}{a}{}_{x}^{(m)} = \frac{1}{D_x}\frac{1}{m}\sum_{t=1}^{\infty}$ （　　　　　） $+ \frac{1}{D_x}\int_0^\infty \overline{M}_{x+t}\ dt$

(5) $\overset{\circ}{a}{}_{x}^{(m)} = \overline{a}_x - \frac{1}{2m}\delta\overline{a}_x +$ （　　　　　）

6. t 年前に x 歳で契約した保険金額１の終身保険を，$x+n$ 歳で満期になる養老保険に変更する。この場合の，以後の払込保険料の算式は，

(1) $P_{x:\overline{n}|} + \dfrac{{}_tV_{x:\overline{n}|} - {}_tV_x}{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}$,　　(2) $P_{x+t:\overline{n-t}|} - \dfrac{{}_tV_x}{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}$

となるが，(1)，(2)を言葉によって説明し，かつ，(1)と(2)が等しいことを証明せよ。

昭和 50 年度　（解答）

午前の部

1. (1) $${}_tp_x = \frac{\ell_{x+t}}{\ell_x} = \frac{S(x+t)}{S(x)} = \frac{\{100-(x+t)\}/100}{(100-x)/100} = 1 - \frac{t}{100-x}$$

(2) $$\mu_x = -\frac{1}{\ell_x}\cdot\frac{d\ell_x}{dx} = -\frac{100}{100-x}\cdot\frac{d}{dx}\frac{1}{100}(100-x) = -\frac{100}{100-x}\cdot\frac{-1}{100} = \frac{1}{100-x}$$

(3) $$\mathring{e}_x = \frac{1}{\ell_x}\int_0^{100-x}\ell_{x+t}\,dt = \frac{100}{100-x}\int_0^{100-x}\frac{100-(x+t)}{100}\,dt$$

$$= \frac{1}{100-x}\left[(100-x)t - \frac{1}{2}t^2\right]_0^{100-x} = \frac{1}{2}(100-x)$$

2. $\bar{a}_x = \int_0^{\infty} v^t\,{}_tp_x\,dt$ であるから，

(1) $$\frac{d\bar{a}_x}{di} = \frac{d}{di}\int_0^{\infty} v^t\,{}_tp_x\,dt = \int_0^{\infty}\frac{dv^t}{di}\,{}_tp_x\,dt = \int_0^{\infty}(-t\,v^{t+1})\,{}_tp_x\,dt$$

$$= -v\int_0^{\infty} t\,v^t\,{}_tp_x\,dt$$

$$= -v(\bar{I}\bar{a})_x$$

(2) $$\frac{d\bar{a}_x}{d\delta} = \frac{d}{d\delta}\int_0^{\infty} v^t\,{}_tp_x\,dt = \frac{d}{d\delta}\int_0^{\infty} e^{-\delta t}\,{}_tp_x\,dt = \int_0^{\infty}\frac{de^{-\delta t}}{d\delta}\,{}_tp_x\,dt$$

$$= \int_0^{\infty} -t\,e^{-\delta t}\,{}_tp_x\,dt$$

$$= -\int_0^{\infty} t\,e^{-\delta t}\,{}_tp_x\,dt$$

$$= \int_0^{\infty} t\,v^t\,{}_tp_x\,dt$$

$$= -(\bar{I}\bar{a})_x$$

3. $P_t = P_{t-1}(1+\alpha_{t-1}) = P_{t-2}(1+\alpha_{t-2})(1+\alpha_{t-1}) = \cdots\cdots$

$$= P_1(1+\alpha_0)(1+\alpha_1)\cdots\cdots(1+\alpha_{t-1}) \qquad (ここに\alpha_0 = 0)\quad ,$$

$S_t = S_{t-1}(1+\beta_{t-1}) = S_{t-1}(1+\beta_{t-2})(1+\beta_{t-1}) = \cdots\cdots$

$$= S_1(1+\beta_0)(1+\beta_1)\cdots\cdots(1+\beta_{t-1}) \qquad (ここに\beta_0 = 0)\quad ,$$

である。

収入の現価をA，給付の現価をBとおくと，

$$A = P_1\ \ddot{a}_{x:\overline{1}|} + P_2\ {}_{1|1}\ddot{a}_x + \cdots\cdots + P_n\ {}_{n-1|1}\ddot{a}_x$$

$$= P_1\ \ddot{a}_{x:\overline{1}|} + P_1(1+\alpha_0)(1+\alpha_1)\ {}_{1|1}\ddot{a}_x + P_1(1+\alpha_0)(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ {}_{2|1}\ddot{a}_x$$
$$+ \cdots\cdots + P_1(1+\alpha_0)(1+\alpha_1)\cdots\cdots(1+\alpha_{n-1})\ {}_{n-1|1}\ddot{a}_x$$

$$= P_1 \sum_{\nu=0}^{n-1} {}_{\nu|1}\ddot{a}_x (1+\alpha_0)(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots\cdots(1+\alpha_\nu)$$

$$= P_1 \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{D_{x+\nu}}{D_x}(1+\alpha_0)(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots\cdots(1+\alpha_\nu)$$

$$B = S_1\frac{C_x}{D_x} + S_2\frac{C_{x+1}}{D_x} + S_3\frac{C_{x+2}}{D_x} + \cdots\cdots + S_n\frac{C_{x+n-1}}{D_x} \qquad (ここにS_1 = 1とする。)$$

$$= \frac{C_x}{D_x} + (1+\beta_0)(1+\beta_1)\frac{C_{x+1}}{D_x} + (1+\beta_0)(1+\beta_1)(1+\beta_2)\frac{C_{x+2}}{D_x} + \cdots\cdots$$

$$+ (1+\beta_0)(1+\beta_1)(1+\beta_2)\cdots\cdots(1+\beta_{n-1})\frac{C_{x+n-1}}{D_x}$$

$$= \frac{1}{D_x}\sum_{\nu=0}^{n-1} C_{x+\nu}(1+\beta_0)(1+\beta_1)(1+\beta_2)\cdots\cdots(1+\beta_\nu)$$

従って，$P_1 = \dfrac{\displaystyle\sum_{\nu=0}^{n-1} C_{x+\nu}(1+\beta_0)(1+\beta_1)(1+\beta_2)\cdots\cdots(1+\beta_\nu)}{\displaystyle\sum_{\nu=0}^{n-1} D_{x+\nu}(1+\alpha_0)(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots\cdots(1+\alpha_\nu)}$

午後の部

4. (1) $\bar{A}^{1}_{x:\overline{n|}} = \int_0^n v^t \ {}_tp_x \ \mu_{x+t} \ dt$

$$= \int_0^n v^t \frac{\ell_{x+t}}{\ell_x} \left(-\frac{1}{\ell_{x+t}} \frac{d\ell_{x+t}}{dt} \right) dt$$

$$= -\frac{1}{\ell_x} \int_0^n v^t \frac{d\ell_{x+t}}{dt} \, dt$$

$$= -\frac{1}{\ell_x} \left\{ \left[v^t \ell_{x+t} \right]_0^n - \int_0^n v^t \log v \ \ell_{x+t} \, dt \right\}$$

$$= 1 - v^n \ {}_np_x - \delta \ \bar{a}_{x:\overline{n|}}$$

(2) $\bar{A}_x = \int_0^\infty v^t \ {}_tp_x \ \mu_{x+t} \, dt$ （(1)と同様に）

$$= -\frac{1}{\ell_x} \left\{ \left[v^t \ \ell_{x+t} \right]_0^\infty - \int_0^\infty v^t \ \log v \, \ell_{x+t} \, dt \right\}$$

$$= 1 - \delta \ \bar{a}_x$$

(3) $\bar{A}_{x:\overline{n|}} = \bar{A}^{1}_{x+\overline{n|}} + v^n \ {}_np_x$

$= (1 - v^n \ {}_np_x - \delta \ \bar{a}_{x:\overline{n|}}) + v^n \ {}_np_x$ （(1)により）

$$= 1 - \delta \ \bar{a}_{x:\overline{n|}}$$

5. (1) $\frac{1}{m} \sum_{t=1}^{\infty} \bar{M}_{x+\frac{t}{m}}$

(2) $\mu_x / 12m^2$

(3) $\frac{1}{2m} A_x \left(1 + \frac{i}{2}\right)$ 又は $\frac{1}{2m} A_x$

(4) $(D - \bar{M})_{x+\frac{t}{m}}$

(5) $\delta / 12m^2$

6. (i) (1) 式について

この契約は，変更時において責任準備金 ${}_tV_x$ を所有する。もし当初から n 年満期養老保険に加入していたとすれば，純保険料 $P_{x:\overline{n|}}$ が払い込まれ，現時点で責任準備金 ${}_tV_{x:\overline{n|}}$ を所有するはずである。従って，今後も $P_{x:\overline{n|}}$ を払い続けるとすれば，責任準備金が ${}_tV_{x:\overline{n|}} - {}_tV_x$ だけ不足することとなる。この不足額を残存期間で均等に償還して行くのがこの方法である。

(2) 式について

現在 $x+t$ 才の人が $n-t$ 年満期の養老保険に加入したときの純保険料は $P_{x+t:\overline{n-t|}}$ である。然るに，この契約は責任準備金 ${}_tV_x$ を所有しているので，その額を残存期間で均等に控除したものがこの方法である。

(ii)
$$P_{x:\overline{n|}} + \frac{{}_tV_{x:\overline{n|}} - {}_tV_x}{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}} = P_{x:\overline{n|}} + \frac{(A_{x+t:\overline{n-t|}} - P_{x:\overline{n|}}\,\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}) - {}_tV_x}{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}}$$

$$= P_{x:\overline{n|}} + \frac{A_{x+t:\overline{n-t|}}}{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}} - P_{x:\overline{n|}} - \frac{{}_tV_x}{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}}$$

$$= P_{x+t:\overline{n-t|}} - \frac{{}_tV_x}{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}}$$