〔問〕

昭和 49 年度　（問題）

午前の部

1. ある母集団の１００個の独立な標本x_i ($i=1$, ……, 100)について

標本平均　$\frac{1}{100}\sum x_i = \bar{x} = 2.5$

標本分散　$\frac{1}{99}\sum (x_i - \bar{x})^2 = 2$

が得られた。適当な近似法を用いて，母集団平均μの信頼度９５％の区間推定を行なえ。

（注） 確率変数Ｚが標準正規分布Ｎ（０，１）に従うときＰ（－２≦Ｚ≦２）≒0.95

2. ある母集団の独立な標本値X_1，………X_2 について，母集団平均μの推定量として線形推定量

$$\bar{\theta} = \sum C_i X_i$$

を考える。すると，不偏な線形推定量の中で分散が最小のものは，標本平均

$$\sum \frac{X_i}{n}$$

であることを示せ。

3. Ｖを３次元数ベクトル空間として

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

とする。$V' = \{xA,\ x \in V\}$ とするとき

(1) V' の次元を求めよ。

(2) V'の正規直交基底を作れ。

午後の部

4. X_1，X_2 を独立な確率変数で，それぞれ平均0，分散 σ_1^2，平均0，分散 σ_2^2 の正規分布に従うものとする。

$$Y_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2$$

$$Y_2 = a_{21}X_1 + a_{22}X_2$$

としたとき，Y_1 と Y_2 が互いに独立であるための必要十分条件を示せ。

5. 同一バス停を通るA社とB社のバスがあるものとする。A社のバスとB社のバスの到着は独立で，その時間間隔は各々平均値 α^{-1}，β^{-1} の指数分布に従うものとする。

(1) 時間 t の間に到着するA社のバス台数の分布を示せ。

(2) 時間 t の間に到着するA社のバスとB社のバスの合計台数Mの分布を示せ。

（注） 平均値 λ の指数分布の確率密度函数は $\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}$

昭和49年度　（解答）

午前の部

1.　標本が充分大きいから，母集団分布が特に異常なものでなければ（具体的には3次の絶対モーメントがあまり大でなければ）標本平均の分布は正規分布で近似できる。母集団分散は標本分散で代用することにして

$$\bar{X}=\sum \frac{x_i}{100} \qquad \mu_x = E(\bar{X}),\ \sigma_x^2 = V(\bar{X})$$

とおけば

$$\mu_x = \mu,\quad \sigma_x^2 = \frac{\sigma}{100} \doteqdot \frac{2}{100}$$

μ, σ^2 は各々母平均，母分散

から

$$P\left(\bar{X}-2\sqrt{\frac{2}{100}} \leqq \mu \leqq \bar{X}+2\sqrt{\frac{2}{100}}\right) = 0.95$$

したがって，μの95％信頼区間は近似的に

$$[2.5-2\times0.14,\ 2.5+2\times0.14]$$
$$=[2.22,\ 2.78]$$

で与えられる。

2.　μを母集団平均，σ^2を母集団分散とすると，$\bar{\theta}=\sum C_i X_i$ が不偏であるためには，

$$E(\bar{\theta})=\sum E(C_i X_i)=\sum C_i\,\mu=\mu$$

$\therefore\ \sum C_i = 1$ でなければならない。

次に

$$V(\bar{\theta})=\sum V(C_i X_i)=\sum C_i^2\sigma^2$$

$\sum C_i = 1$ の条件の下で $\sum C_i^2$ を最小にするのは $C_i = \dfrac{1}{n}$ である。

したがって　標本平均

$$\sum \frac{1}{n} X_i$$

が分散最小の線型不偏推定量である。

3.　Vの基底　$e_1 = (1,\ 0,\ 0)$

$e_2 = (0,\ 1,\ 0)$

$e_3 = (0,\ 0,\ 1)$

をとる。

$$e_1' = e_1 A = (1,\ 0,\ 0)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = (1,\ 1,\ 1)$$

$$e_2' = e_2 A = (0,\ 1,\ 0)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = (1,\ 1,\ 0)$$

$$e_3' = e_3 A = (0,\ 0,\ 1)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = (1,\ 1,\ -1)$$

とおくと，e_1'，e_2'，e_3' はV′を張るが，e_1'と e_2 は一次独立，e_1'，e_2'，e_3' の3つは

$$e_1' - 2e_2' + e_3' = (0,\ 0,\ 0)$$

だから一次独立ではない。したがってV′は2次元のVの部分空間となり，e_1'，e_2'はその一組の基底となる。

正規直交基底を作るためには，

$e_1'' = a e_1' + b e_2'$ とおけば

$e_1'' = (a+b,\ a+b,\ a)$

だから $a=1$，$b=-1$ とおけば

$e_1'' = (0,\ 0,\ 1)$ となり

$e_1'' \cdot e_2' = 0.1 + 0.1 + 1.0 = 0$

従って　$e_1'' = (0,\ 0,\ 1)$

$$e_2'' = \frac{e_2'}{|e_2'|} = \frac{e_2'}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ 0\right)$$

とおけば e_1''，e_2'' はV′の正規直交基底となる。

午後の部

4. X_1, X_2 の同時分布の確率密度函数 $f(x_1, x_2)$ は

$$f(x_1, x_2) = (2\pi\sigma_1\sigma_2)^{-1} \exp \frac{1}{2} \mathbf{X}(\sigma) /\!/$$

ここに $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ $(\sigma) = \begin{pmatrix} \sigma_1{}^{-2} & 0 \\ 0 & \sigma_2{}^{-2} \end{pmatrix}$

$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ とおくと

もし $\det A = 0$ なら Y_1 と Y_2 は独立であり得ないことは明か,

$\det A \neq 0$ のとき

$$f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = (2\pi\sigma_1\sigma_2)^{-1} (\det A)^{-1} \exp \frac{1}{2} {}^tY \cdot {}^tA^{-1} (\sigma) A^{-1} (\sigma) A^{-1} \cdot Y\, dy_1\, dy_2$$

${}^tA^{-1}(\sigma) A^{-1} = D$ とおくと

$$f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = K \exp \frac{1}{2} (y_1, y_2) \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} dy_1\, dy_2$$

の形となる(Kは定数)。

したがって Y_1, Y_2 の同時分布の確率密度函数を $f'(y_1, y_2)$ とおくと

$$f'(y_1, y_2) = K \exp \frac{1}{2} (y_1, y_2) \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$= K \exp \frac{1}{2} (y_1{}^2 d_{11} + y_2{}^2 d_{22} + d_{12} y_1 y_2)$$

から, $d_{21} + d_{12} = 0$ が $f'(y_1, y_2) = f_1(y_1)\, f_2(y_2)$ (f_1, f_2 は各々 y_1, y_2 の周辺確率密度函数)の形に分離できるための条件となる。

したがって

$$ {}^{t-1}A(\sigma)A^{-1} = \frac{1}{(\det A)^2} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1^{-2} & 0 \\ 0 & \sigma_2^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{(\det A)^2} \begin{pmatrix} a_{22}^2 \sigma_1^{-2} + a_{21}^2 \sigma_2^{-2}, & -a_{22} a_{12} \sigma_1^{-2} - a_{21} a_{11} \sigma_2^{-2} \\ -a_{12} a_{22} \sigma_1^{-2} - a_{11} a_{21} \sigma_2^{-2}, & a_{12}^2 \sigma_1^{-2} + a_{11}^2 \sigma_2^{-2} \end{pmatrix}$$

から，　$a_{12}a_{22}\sigma_1^{-2}+a_{11}a_{21}\sigma_2^{-2}=0$

故に，Y_1 と Y_2 が独立になるための必要十分条件は

(1)　$\det A \neq 0$　すなわち　$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$

(2)　$a_{12}a_{22}\sigma_1^{-2}+a_{11}a_{21}\sigma_2^{-2}=0$

5.　(1)　$P(N_{t+\triangle t}=0)=P(N_t=0)e^{-\alpha\triangle t}+0(t)$

$P(N_{t+\triangle t}=n)=P(N_t=n)e^{-\alpha\triangle t}+P(N_t=n-1)(1-e^{-\alpha\triangle t})+0(\triangle t)$

$\therefore\quad \frac{d}{dt}P(N_t=0)=-\alpha P(N_t=0)$ ………………………………(a)

$\frac{d}{dt}P(N_t=n)=\alpha P(N_t=n-1)-\alpha P(N_t=n)$ ………(b)

(a)の一般解は

$P(N_t=0)=C\,e^{-\alpha t}$

$P(N_o=0)=1$　から　$C\cdot e^{-0}=1$，　故に　$C=1$

(b)を解くために

$P(N_t=n)=e^{-\alpha t}u_n(t)$

とおき (b) に代入すれば

$u_n'(t)=\alpha u_{n-1}(t)$

$n>0$ のとき　$u_n(0)=P(N_o=n)=0$　だから

$u_n(t)=\alpha\int_0^t u_{n-1}(s)\,ds$

これから計算して

$$u_n(t)=\frac{(\alpha t)^n}{n!}$$

$$\therefore\quad P(N_t=n)=\frac{(\alpha t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$$

(2)　同様にしてB社のバスについては，時間 t の間に到着する台数を N' とすれば

$$P(N'_t=n)=\frac{(\beta t)^n\,e^{-\lambda t}}{n!}$$

従って，$P(M_t=n)=P(N_t+N'_t=n)$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(\alpha t)^k (\beta t)^{n-k}}{k!(n-k)!} e^{-(\alpha+\beta)t}$$

$$= \frac{(\alpha+\beta)^n t^n}{n!} e^{-(\alpha+\beta)t}$$