数　学　I（問題）

午前の部

1. 確率変数Xが正規分布N（μ, σ^2）に従い，

$$P(X \leqq 89) = 0.90$$

$$P(X \leqq 94) = 0.95$$

であるとき，μおよびσを求めよ。

ただし，ZがN（0，1）に従うとき

$$P(Z \leqq 1.28) = 0.90$$

$$P(Z \leqq 1.64) = 0.95$$

2. X_1，………，X_n，………が独立な確率変数で$E(X_i)=\mu$，$V(X_i)=\sigma^2$ とする。

εを任意の正の数として

$$|\bar{X}-\mu| > \varepsilon, \quad \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

となる確率は$n\to\infty$のとき0に収束することをチェビシェフの不等式を用いて証明せよ。

3. X，Yが離散分布をする確率変数で，ある数Mがあって

$$P(|X-Y| \leqq M) = 1$$

とする。

$E(X)$が有限ならば$|E(X)-E(Y)| \leqq M$であることを示せ。

午後の部

4. 区間〔0，1〕上に独立に2点A，Bを無作為にとり，AとBの中点をM点とする。Mの座標をXとするとき

(1) Xの分布関数と確率密度関数を求めよ。

(2) Xの平均値と分散を求めよ。

5. 電話料金は，はじめの3分以内はa円，3分以上は1分増すごとにb円とし，1分未満は切り上げるものとする。通話時間Xは平均λの指数分布をするものとして，電話料金Yの平均値を求めよ。

（注）平均値λの指数分布の確率密度関数は$\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}$　$x \geqq 0$

数　学　I　（解答）

1. $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ とすると，Zは標準正規分布N（0，1）に従う。

従って　$P(Z\leq 1.28)=0.90$　　$P(Z\leq 1.64)=0.95$

から，　$P(\dfrac{X-\mu}{\sigma}\leq 1.28)=0.90$　$P(\dfrac{X-\mu}{\sigma}\leq 1.64)=0.95$

$\therefore$　$P(X\leqq 1.28(\sigma-\mu))=0.90$　　$P(X\leq 1.64\sigma-\mu)=0.95$

上の式と

$P(X\leqq 89)=0.90$　　$P(X\leqq 94)=0.95$

から　$1.28\sigma-\mu=89$　　$1.64\sigma-\mu=94$

これを解いて　$\sigma\fallingdotseq 14$　　$\mu\fallingdotseq 71$

2. $V(\bar{X})=\dfrac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}V(X_i)=\dfrac{1}{n^2}\cdot n\sigma^2=\dfrac{\sigma^2}{n}$，　$E(\bar{X})=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\mu$

とチェビシェフの不等式

$$P(|\bar{X}-\mu|\geqq kV(\bar{X})\leqq\frac{1}{k}$$

から，　$P(|\bar{X}-\mu|\geqq k\circ\dfrac{\sigma^2}{k})\leqq\dfrac{1}{k}$

$$\therefore\quad P(|\bar{X}-\mu|\geqq\varepsilon)\leqq\frac{1}{\varepsilon/(\frac{\sigma^2}{n})}=\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{\sigma^2}{n}\to 0\ (n\to\infty)$$

3. （X, Y）のとり得る値を各々 x_i，y_j として

XとYの同時確率分布を

$$P_{ij}=P(X=x_i,\ Y=y_j)$$

とする。

$P(|X-Y|\leqq M)=1$　から，$P_{ij}\neq 0$ である i，j については

$|x_i-x_j|\leqq M$ でなければならない

従って，　$E(|X-Y|)=\sum_{i,j}P_{ij}|x_i-y_j|\leqq\sum_{i,j}P_{ij}\cdot M=M$

次に　$\left|E(X)-E(Y)\right| = \left|E(X-Y)\right| = \left|\sum_{i,j} P_{ij}\cdot(x_i-y_j)\right|$

$$\leqq \sum_{i,j} P_{ij}\left|x_i-y_i\right| \leqq M$$

故に　$\left|E(X)-E(Y)\right| \leqq M$

4.　A，Bの座標をX_1，X_2とする。するとX_1，X_2は独立な確率変数で，各々区間〔0，1〕で一様分布をする。

$$X=\frac{X_1+X_2}{2}$$

だから　X_1の確率密度函数　$f(x_1)=1 \quad (0 \leqq x_1 \leqq 1)$

$$=0 \quad (x_1<0 \text{ および } 1<x_1)$$

から　X_1の分布関数は

$$F(x_1)=P(X_1 \leqq x_1)=\int_{-\infty}^{x_1}(x_1)\,dx_1 = 0 \qquad x_1 \leqq 0$$

$$= x_1 \qquad 0 \leqq x_1 \leqq 1$$

$$= 1 \qquad 1 \leqq x_1$$

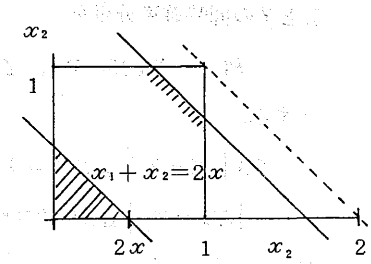
従って　Xの分布関数は

$$F(x)=P(X\leqq x)=P\left(\frac{X_1+X_2}{2}\leqq x\right)=\int_{\frac{x_1+x_2}{2}\leqq x} f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2$$

ここに$f(x_1, x_2)$はX_1とX_2の同時確率密度関数で，

X_1とX_2の独立性から　$f(x_1, x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$

$$\therefore\quad F(x)=\int_{\frac{x_1+x_2}{2}\leqq x} f(x_1)\,f(x_2)\,dx_1\,dx_2$$



$f(x_1)\cdot f(x_2)$は図の正方形内で1，その外では0だから，$F(x)$は図の斜線を付した領域の面積に等しく

$$F(x)=0 \qquad (x\leqq 0)$$

$$F(x)=\frac{1}{2}(2x)^2=2x^2 \quad \left(0\leqq x\leqq\frac{1}{2}\right)$$

$$F(x)=1-\frac{1}{2}(2-2x)^2=1-2(1-x)^2 \qquad \left(\frac{1}{2}\leqq x\leqq 1\right)$$

$$=-1+4x-2x^2$$

$$F(x)=0 \qquad (1 \leqq x)$$

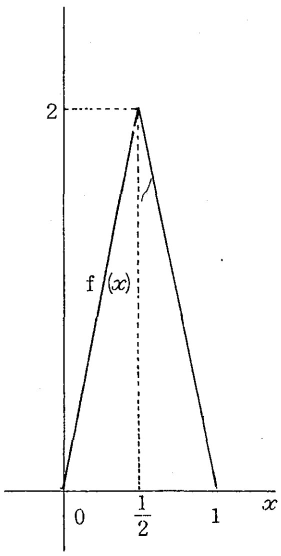
これからXの確率密度函数 f (x)は

$$f(x)=\frac{d}{dx}F(x)=0 \qquad (x \leqq 0)$$

$$t(x)=\frac{d}{dx}F(x)=4x \qquad \left(0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}\right)$$

$$f(x)=\frac{d}{dx}F(x)=4-4x \qquad \left(\frac{1}{2} \leqq x \leqq 1\right)$$

$$f(x)=\frac{d}{dx}F(x)=0 \qquad (1 \leqq x)$$



Xの平均値は

$$E(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot x\,dx=\int_0^1 f(x)\,x\cdot dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}} 4x\cdot x\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(4-4x)\cdot x\,dx$$

$$=\left[\frac{4}{3}x^3\right]_0^{\frac{1}{2}}+\left[2x^2-\frac{4}{3}x^3\right]_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+2-\frac{4}{3}-2\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$=\frac{1}{2}$$

Xの分散は

$$E(X^2)=\int_{\infty}^{\infty} f(x)\cdot x^2\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}} 4x\cdot x^2\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(4-4x)x^2\,dx$$

$$=\left[x^4\right]_0^{\frac{1}{2}}+\left[\frac{4}{3}x^3-x^4\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{4}{3}-1-\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$=\frac{7}{24}$$

$$V(X)=E(X^2)-\left\{E(X)\right\}^2=\frac{7}{24}-\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$=\frac{1}{24}$$

5.
$$\varphi(x)=\begin{cases} a & (0\leqq x\leqq 3) \\ a+nb & (2+n<x\leqq 3+n\ ;,\ n=1,\ 2,\ \cdots\cdots) \end{cases}$$

とおけば　$Y=\varphi(X)$

$$P(Y=a)=P(0\leqq X<3)=\int_0^3 \frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}dx=1-e^{-\frac{3}{\lambda}}$$

$$P(Y=a+nb)=P(2+n\leqq X<3+n)=\int_{2+n}^{3+n}\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}dx$$

$$=e^{-\frac{2+n}{\lambda}}-e^{-\frac{3+n}{\lambda}}$$

から　$E(Y)=a\cdot P(Y=a)+\sum_{n=1}^{\infty}(a+nb)P(Y=a+nb)$

$$=a\cdot(1-e^{-\frac{3}{\lambda}})+\sum_{n=1}^{\infty}(a+nb)\left(e^{-\frac{2+n}{\lambda}}-e^{-\frac{3+n}{\lambda}}\right)$$

$$=a\left\{1-e^{-\frac{3}{\lambda}}+\sum_{n=1}^{\infty}(e^{-\frac{2+n}{\lambda}}-e^{-\frac{3+n}{\lambda}})\right\}$$

$$+b\left\{\sum_{n=1}^{\infty}n(e^{-\frac{2+n}{\lambda}}-e^{-\frac{3+n}{\lambda}})\right.$$

$$=a+b\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\frac{2+n}{\lambda}}$$

$$=a+be^{-2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\frac{n}{\lambda}}$$

$$=a+be^{-3}\cdot\frac{1}{1-e^{-\frac{1}{\lambda}}}$$