昭和48年度　（問題）

午前の部

1. 確率変数Xが指数分布に従うとき

$$P(X \leqq a+x \mid X \geqq a)=P(X \leqq x)$$

が成り立つことを証明せよ。ここに，

$$a,\ x>0$$

2. ある自動車保険で，初年度の保険料はP，第t年度（$t=1,\ 2,\ \cdots\cdots$）に保険金支払事由の発生がなかった場合は，第$t+1$年度の保険料は，第t年度の保険料のλ倍（$0<\lambda<1$）になり，第t年度に保険金支払事由の発生があった場合には，第$t+1$年度の保険料は，初年度と同じPとなる。

どの年度でも，保険金支払事由の発生のある確率はqとする。また，契約は無限に続くものとする。

(a) 第n年度（$n \geqq 2$）の保険料が$\lambda^k P$である確率p_k（$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1$）を求めよ。

(b) 第n年度の保険料の期待値の$n \to \infty$における極限値を求めよ。

3. ある群団に属する人がある菌をもっている確率はaである。

この菌に関する検査法が4つあり，検査T_i（$i=1,\ 2,\ 3,\ 4$）で，保菌者が陽性となる確率はb_i，無菌者が陽性となる確率はc_iとする。また，各検査法は，たがいに独立とする（すなわち，たとえば検査T_1で保菌者が陽性と出れば，検査T_2でも陽性が出やすいとか，あるいはその逆というようなことがない。）。

この群団のある人が検査T_1，T_2で陽性，T_3で非陽性であった。

(a) この人が保菌者である確率を求めよ。

(b) この人が，検査T_4で陽性となる確率を求めよ。

〔問〕

午後の部

4. 買切り制で，週刊紙を販売している売店がある。1部a円で仕入れて，b円で売るものとする。毎週の需要冊数Xは平均λのポアソン分布に従うとする。n部仕入れるときの利益（売れ残りは，全額損失とする。）の期待値を，ポアソン分布表からえた次の2つの数値π_0，π_1を使って求めよ。

$$\pi_0 = e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{n}\frac{\lambda^x}{x!} \quad , \quad \pi_1 = e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{n-1}\frac{\lambda^x}{x!}$$

5. A，Bを確率事象とするとき，

AとBとの和事象を　A＋B

AとBとの積事象を　AB

Aの余事象を　A^C

のように表わすことにする。

(a) P（A＋B）＝P（A）＋P（B）－P（AB）

という公式を使って，

$$\begin{aligned} P(A+B+C) = {} & P(A)+P(B)+P(C) \\ & -P(AB)-P(AC)-P(BC) \\ & +P(ABC) \end{aligned}$$

という公式を導き出せ。

(b) 1から3までの目を2つずつもち，4以上の目のないさいころがある。このさいころをn回ふって，iの目（i＝1，2，3）が1回も出ないという事象をA_{ni}で表わす。

このA$_{ni}$という記号を使って，n回（$n \geqq 3$）までの間に，1，2，3の目全部が出るという事象を表現せよ。

(c) (a)，(b)の結果を利用して，(b)のさいころをn回（$n \geqq 3$）ふって，n回目にはじめて1から3までの目が全部出るという確率を求めよ。

昭和48年度　（解答）

午前の部

1.　Xの確率密度関数は，

$\lambda e^{-\lambda x}$ ………$x>0$

0 　　 ………$x \leqq 0$

$\therefore F(x)=P(X<x)=\int_0^x \lambda e^{-\lambda x}dx=\left[-e^{-\lambda x}\right]_0^x$

$=1-e^{-\lambda x}$

$$P(X \leqq a+x \mid X \geqq a)=\frac{P(X \geqq a,\ X \leqq a+x)}{P(X \geqq a)}$$

$$=\frac{F(a+x)-F(a)}{1-F(a)}$$

$$=\frac{e^{-\lambda a}-e^{-\lambda(a+x)}}{e^{-\lambda x}}$$

$$=1-e^{-\lambda x}$$

$$=P(X \leqq x)$$

2.　(a)　p_0は，第$n-1$保険年度で保険金支払事由のある確率だから，

$p_0=q$

$1 \leqq k \leqq n-2$のとき，p_kは第$n-1$，$n-2$，………，$n-k$保険年度に保険金支払事由の発生がなく，かつ，第$n-k-1$年度に保険金支払事由の発生があるという確率となる。

$\therefore p_k=qp^k$（$p=1-q$とおいた。）

p_{n-1}は，$n-1$年間全然，保険金支払事由がおこらないという確率であり，$p_{n-1}=p^{n-1}$

(b)　第n年度の保険料の期待値

$$=\sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k P p_k$$

$$=P\left\{q\sum_{k=0}^{n-2} p^k \lambda^k+p^{n-1}\lambda^{n-1}\right\}$$

$$=P\left\{q\frac{1-(p\lambda)^{n-1}}{1-p\lambda}+(p\lambda)^{n-1}\right\}$$

$$\to P\frac{q}{1-p\lambda}$$

3. この群団からランダムにとった人が保菌者であるという事象をA，検査T_iで陽性となる事象をB_iとする。

検査T_1，T_2で陽性，T_3で非陽性という事象は$B_1B_2B_3^c$

(a) 求める確率$=P(A \mid B_1B_2B_3^c)$

$$=\frac{P(AB_1B_2B_3^c)}{P(B_1B_2B_3^c)}$$

$$=\frac{P(AB_1B_2B_3^c)}{P(AB_1B_2B_3^c)+P(A^cB_1B_2B_3^c)}$$

$$=\frac{P(A)P(B_1B_2B_3^c \mid A)}{P(A)P(B_1B_2B_3^c \mid A)+P(A^c)P(B_1B_2B_3^c \mid A^c)}$$

$=(\rightarrow)$

B_1，B_2，B_3は独立だから

$$P(B_1B_2B_3^c \mid A)=P(B_1 \mid A)P(B_2 \mid A)P(B_3^c \mid A)$$

$$=b_1b_2(1-b_3)$$

$$\therefore (\rightarrow)=\frac{ab_1b_2(1-b_3)}{ab_1b_2(1-b_3)+(1-a)c_1c_2(1-c_3)}$$

(b) 求める確率$=P(B_4 \mid B_1B_2B_3^c)$

$$=\frac{P(B_1B_2B_3^cB_4)}{P(B_1B_2B_3^c)}$$

$$=\frac{P(A)P(B_1B_2B_3^cB_4 \mid A)+P(A^c)P(B_1B_2B_3^cB_4 \mid A^c)}{P(A)P(B_1B_2B_3^c \mid A)+P(A^c)P(B_1B_2B_3^c \mid A^c)}$$

$$=\frac{ab_1b_2(1-b_3)b_4+(1-a)c_1c_2(1-c_3)c_4}{ab_1b_2(1-b_3)+(1-a)c_1c_2(1-c_3)}$$

午後の部

4. 利益Yは，

$$Y=bX-an \cdots\cdots\cdots X\leqq n$$

$$=(b-a)n \cdots\cdots X\geqq n$$

$$\therefore EY=e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{n}(bx-an)\frac{\lambda^x}{x!}+(b-a)ne^{-\lambda}\sum_{x=n+1}^{\infty}\frac{\lambda^x}{x!}$$

$$=be^{-\lambda}\sum_{x=0}^{n}x\frac{\lambda^x}{x!}-an\pi_0+(b-a)n(1-\pi_0)=(\rightarrow)$$

ここに，$\sum_{x=0}^{n} x\dfrac{\lambda^x}{x!}=\lambda\sum_{x=1}^{n}\dfrac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}=\lambda\sum_{x=0}^{n-1}\dfrac{\lambda^x}{x!}$

$\therefore e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{n} x\dfrac{\lambda^x}{x!}=\lambda\pi_1$

$\therefore(\rightarrow)=b\lambda\pi_1-an\pi_0+(b-a)n(1-\pi_0)$

$=b\lambda\pi_1-bn\pi_0+(b-a)n$

5. (a) $P(A+B+C)=P((A+B)+C)$

$=P(A+B)+P(C)-P((A+B)C)$

$=P(A)+P(B)-P(AB)+P(C)-P(AC+BC)$

$=(\rightarrow)$

ここに，$P(AC+BC)=P(AC)+P(BC)-P(ABC)$

$\therefore(\rightarrow)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$

(b) $A_{n1}^c A_{n2}^c A_{n3}^c \ (=(A_{n1}+A_{n2}+A_{n3})^c)$

(c) 求める確率は，

$p_n=P(A_{n1}^c\ A_{n2}^c\ A_{n3}^c)$

として，p_n-p_{n-1} である。（$p_2=0$ と定義する。）

$p_n=1-P(A_{n1}+A_{n2}+A_{n3})$

(a)の結果から

$P(\sum_{i=1}^{3}A_{ni})=\sum_{i}P(A_{ni})-\sum_{\substack{i<j\\ i,j\in\{1,2,3\}}}P(A_{ni}A_{nj})+P(A_{n1}A_{n2}A_{n3})$

ここに $P(A_{ni})=(\frac{2}{3})^n$

$P(A_{ninj})=(\frac{1}{3})^n$

$P(A_{n1}A_{n2}A_{n3})=0$

だから，

$p_n=1-3(\frac{2}{3})^n+3(\frac{1}{3})^n$

$\therefore p_n-p_{n-1}=\triangle p_{n-1}$

$=-3(\frac{2}{3}-1)(\frac{2}{3})^{n-1}+3(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3})^{n-1}$

$=(\frac{2}{3})^{n-1}-2(\frac{1}{3})^{n-1}$

$=\dfrac{2}{3^{n-1}}(2^{n-2}-1)$