昭和 48 年度　（問題）

午前の部

1.　m年払込，n年満期養老保険を，契約後t年（$t<m$）して同一保険金のm'年払込（$t<m'$）n'年満期養老保険に変更した。変更後の年払保険料を求めよ。ここに，付加保険料は$\alpha-\beta-\gamma$方式とし，変更時の責任準備金の差額は以後の保険料で調整するものとする。

2.　x歳契約，n年満期養老保険の純保険料式およびチルメル式責任準備金（保険金年末払）の再帰方程式はつぎのように表わせることを証明せよ。

(1)　$1-{}_{t+1}V_{x:\overline{n|}}=u_{x+t}\{(1-{}_tV_{x:\overline{n|}})-(P_{x:\overline{n|}}+d)\}$

(2)　$1-{}_{t+1}V^{(\alpha)}_{x:\overline{n|}}=u_{x+t}\{(1-{}_tV^{(\alpha)}_{x:\overline{n|}})-(P^{(\alpha)}_{x:\overline{n|}}+d)\}$

ここに$P^{(\alpha)}_{x:\overline{n|}}=P_{x:\overline{n|}}+\dfrac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}$であり，${}_0V^{(\alpha)}_{x:\overline{n|}}=-\alpha$とする。

3.　死亡表がメーカムの法則（$\mu_x=A+B\cdot C^x$）に従う場合に

$$\bar{A}^1_{xy}=\frac{C^x}{C^x+C^y}\cdot\bar{A}_{xy}-A\cdot\frac{C^x-C^y}{C^x+C^y}\cdot\bar{a}_{xy}$$

が成り立つことを証明せよ。

午後の部

4.　死因(1)，(2)による死力$\mu^{(1)}_x$，$\mu^{(2)}_x$（$\mu_x=\mu^{(1)}_x+\mu^{(2)}_x$）が既知のとき，絶対死亡率$q^{(1)}_x$，$q^{(2)}_x$を求めよ。

5.　保険期間n年の生命保険契約において，t年度における死亡保険金をs_t，満期保険金を1とする。予定死亡率$\{q_x\}$および$\{q'_x\}$による全期払平準純保険料をそれぞれP，P′とした場

〔問〕

合，$q_{x+t} > q'_{x+t}$（$0 \leqq t < n$）であればP≧P′が成立することを示せ。ここに保険金は保険年度末払とし，

$$s_t - {}_tV \geqq 0, \qquad (0 < t < n)$$

であるものとする。

6. 標準下体の被保険者（死亡指数 α）に対し，標準死亡率の養老保険における平準純保険料(P)で加入させ，その代り ℓ 年間 $t/(\ell+1)$（ℓ：正整数，t：保険年度）の削減保険金を支払う保険契約を締結すれば収支相等するものとした場合，削減期間 ℓ は次式で示されることを証明せよ。

$$\ell = \frac{\overline{R}_x^{(\alpha)} - \overline{R}_{x+\ell+1}^{(\alpha)}}{\overline{M}_x^{(\alpha)} - (P^{(\alpha)} - P)(N_x^{(\alpha)} - N_{x+n}^{(\alpha)})} - 1$$

ここに（α）は死亡指数 α による計算基数と平準純保険料を示すものとする。

昭和 48 年度　（解答）

午前の部

1. 変更前の保険種類の第 t 年度末の責任準備金を ${}_tV$ とし，求める営業保険料を P' とすれば，収支相等の原則により次の等式が成立しなければならない。

$$ {}_tV+P'\ddot{a}_{x+t:\overline{m'-t}|}=\bar{A}_{x+t:\overline{n'-t}|}+\beta P'\ddot{a}_{x+t:\overline{m'-t}|}+\gamma\ddot{a}_{x+t:\overline{m'-t}|}+\gamma'{}_{m'-t|}\ddot{a}_{x+t:\overline{n'-m'}|} $$

（ただし，γ' は払済後の維持費）

上式を P' について解けば，

$$ P'=\frac{\bar{A}_{x+t:\overline{n'-t}|}+\gamma\ddot{a}_{x+t:\overline{m'-t}|}+\gamma'_{m'-t|}\ddot{a}_{x+t:\overline{n'-m'}|}-{}_tV}{(1-\beta)\ddot{a}_{x+t:\overline{m'-t}|}} $$

$$ =\frac{\bar{A}_{x+t:\overline{n'-t}|}+\alpha+\gamma\ddot{a}_{x+t:\overline{m'-t}|}+\gamma'_{m'-t|}\ddot{a}_{x+t:\overline{n'-m'}|}}{(1-\beta)\ddot{a}_{x+t:\overline{m'-t}|}}-\frac{{}_tV+\alpha}{(1-\beta)\ddot{a}_{x+t:\overline{m'-t}|}} $$

$$ ={}_{m'-t}P'_{x+t:\overline{n'-t}|}-\frac{{}_tV+\alpha}{(1-\beta)\ddot{a}_{x+t:\overline{m'-t}|}} $$

2. 責任準備金の再帰公式は

(1) $vp_{x+t}\cdot{}_{t+1}V_{x:\overline{n}|}={}_tV_{x:\overline{n}|}+P_{x:\overline{n}|}-vq_{x+t}$

両辺から vp_{x+t} を引き，変形すると，

$$ vp_{x+t}(1-{}_{t+1}V_{x:\overline{n}|})=v(p_{x+t}+q_{x+t})-{}_tV_{x:\overline{n}|}-P_{x:\overline{n}|} $$

$$ =v-{}_tV_{x:\overline{n}|}-P_{x:\overline{n}|} $$

$$ =(1-{}_tV_{x:\overline{n}|})-(P_{x:\overline{n}|}+d) $$

また，$\dfrac{1}{vp_{x+t}}=\dfrac{D_{x+t}}{D_{x+t+1}}=u_{x+t}$　だから

$$ 1-{}_{t+1}V_{x:\overline{n}|}=u_{x+t}\{(1-{}_tV_{x:\overline{n}|})-(P_{x:\overline{n}|}+d)\} $$

(2) ${}_tV^{(\alpha)}_{x:\overline{n}|}={}_tV_{x:\overline{n}|}-\dfrac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$

$$ P^{(\alpha)}_{x:\overline{n}|}=P_{x:\overline{n}|}+\frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} $$

であるから，(1)より

$$1-\left({}_{t+1}V^{(\alpha)}_{x:\overline{n|}}+\frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}\ddot{a}_{x+t+1:\overline{n-t-1|}}\right)=u_{x+t}\left[\left\{1-\left({}_{t}V^{(\alpha)}+\frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}\right)\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}\right\}\right.$$

$$\left.-\left(P^{(\alpha)}_{x:\overline{n|}}-\frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}+d\right)\right]\cdots\cdots\cdots①$$

$$u_{x+t}\frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}\left(\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}-1\right)=\frac{D_{x+t}}{D_{x+t+1}}\frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}\left(\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}-1\right)$$

$$=\frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}\ddot{a}_{x+t+1:\overline{n-t-1|}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots②$$

②式を①式に代入すると，

$$1-{}_{t+1}V^{(\alpha)}_{x:\overline{n|}}=u_{x+t}\left\{\left(1-{}_{t}V^{(\alpha)}_{x:\overline{n|}}\right)-\left(P^{(\alpha)}_{x:\overline{n|}}+d\right)\right\}$$

を得る。

(2)については(1)と同様にしても解ける。

3. $\bar{A}_{\overset{1}{x}y}=\int_0^\infty v^t\,{}_tp_{xy}\,\mu_{x+t}\,dt$

$$=\int_0^\infty v^t\,{}_tp_{xy}\left(A+BC^{x+t}\right)dt$$

$$=A\int_0^\infty v^t\,{}_tp_{xy}\,dt+\int_0^\infty v^t\,{}_tp_{xy}\,BC^{x+t}\,dt$$

$$=A\bar{a}_{xy}+\frac{C^x}{C^x+C^y}\int_0^\infty v^t\,{}_tp_{xy}\left(BC^{x+t}+BC^{y+t}\right)dt$$

$$=A\bar{a}_{xy}+\frac{C^x}{C^x+C^y}\int_0^\infty v^t\,{}_tp_{xy}\left(\mu_{x+t}+\mu_{y+t}-2A\right)dt$$

$$=A\bar{a}_{xy}+\frac{C^x}{C^x+C^y}\left(\bar{A}_{xy}-2A\bar{a}_{xy}\right)$$

$$=\frac{C^x}{C^x+C^y}\bar{A}_{xy}-A\frac{C^x-C^y}{C^x+C^y}\bar{a}_{xy}$$

午後の部

4. $\mu_x=\mu_x^{(1)}+\mu_x^{(2)}=-\dfrac{1}{\ell_x}\dfrac{d\ell_x}{dx}$

他方

$$d_x^{(1)}=\int_0^1 \ell_{x+t}\,\mu_{x+t}^{(1)}\,dt$$

$$d_x^{(2)}=\int_0^1 \ell_{x+t}\,\mu_{x+t}^{(2)}\,dt$$

したがって，絶対死亡率は

$$q_x^{(1)}=\frac{d_x^{(1)}}{\ell_x-\frac{1}{2}d_x^{(2)}},\quad q_x^{(2)}=\frac{d_x^{(2)}}{\ell_x-\frac{1}{2}d_x^{(1)}}$$

5. $s_t={}_tV+K_t$ （$K_t\geqq 0$）とする。

責任準備金の再帰公式によりPについて

$${}_tV+P-v\,q_{x+t}({}_{t+1}V+K_t)=v(1-q_{x+t})\,{}_{t+1}V$$

$$v\,{}_{t+1}V-{}_tV=P-v\,q_{x+t}K_t$$

両辺に v^t を乗じ，$t=0\sim n-1$ の総和をとると

$$v^n\,{}_nV-{}_0V=P(1+v+\cdots\cdots+v^{n-1})-v\sum_{t=0}^{n-1}q_{x+t}\,v^t K_t$$

${}_0V=0$，${}_nV=1$ だから，

$$P=\frac{v^n+\sum_{t=0}^{n-1}q_{x+t}\,v^{t+1}K_t}{\ddot{a}_{\overline{n|}}}$$

一方，P′ について $q'_{x+t}=q_{x+t}-\alpha_t$（$\alpha_t>0$）とすればPと同様にして，

$$P'=\frac{v^n+\sum_{t=0}^{n-1}q'_{x+t}\,v^{t+1}K_t}{\ddot{a}_{\overline{n|}}}$$

$$=\frac{v^n+\sum_{t=0}^{n-1}(q_{x+t}-\alpha_t)\,v^{t+1}K_t}{\ddot{a}_{\overline{n|}}}$$

$$=\frac{v^n+\sum_{t=0}^{n-1}q_{x+t}\,v^{t+1}K_t}{\ddot{a}_{\overline{n|}}}-\frac{\sum_{t=0}^{n-1}q_{x+t}\,\alpha_t\cdot v^{t+1}K_t}{\ddot{a}_{\overline{n|}}}$$

$$= \mathrm{P} - \frac{\sum_{t=0}^{n-1} q_{x+t}\ \alpha_t\ v^{t+1}\ \mathrm{K}_t}{\ddot{a}_{\overline{n}|}}$$

$$\mathrm{P} - \mathrm{P}' = \frac{\sum_{t=0}^{n-1} q_{x+t}\ \alpha_t\ v^{t+1}\ \mathrm{K}_t}{\ddot{a}_{\overline{n}|}} \geqq 0$$

$$\therefore \mathrm{P} \geqq \mathrm{P}'$$

6. 保険金を削減しない場合の保険料は、

$$\mathrm{P}^{(\alpha)} = \frac{\overline{\mathrm{M}}_x^{(\alpha)} - \overline{\mathrm{M}}_{x+n}^{(\alpha)} + \mathrm{D}_{x+n}^{(\alpha)}}{\mathrm{N}_x^{(\alpha)} - \mathrm{N}_{x+n}^{(\alpha)}}$$

削減する場合の保険料は，

$$\mathrm{P} = \frac{\frac{1}{\ell+1} \sum_{t=1}^{\ell+1} t\,\overline{\mathrm{C}}_{x+t-1}^{(\alpha)} + \overline{\mathrm{M}}_{x+\ell+1}^{(\alpha)} - \overline{\mathrm{M}}_{x+n}^{(\alpha)} + \mathrm{D}_{x+n}^{(\alpha)}}{\mathrm{N}_x^{(\alpha)} - \mathrm{N}_{x+n}^{(\alpha)}}$$

$$= \frac{\frac{1}{\ell+1} \{ \overline{\mathrm{R}}_x^{(\alpha)} - \overline{\mathrm{R}}_{x+\ell+1}^{(\alpha)} - (\ell+1) \overline{\mathrm{M}}_{x+\ell+1}^{(\alpha)} \} + \overline{\mathrm{M}}_{x+\ell+1}^{(\alpha)} - \overline{\mathrm{M}}_{x+n}^{(\alpha)} + \mathrm{D}_{x+n}^{(\alpha)}}{\mathrm{N}_x^{(\alpha)} - \mathrm{N}_{x+n}^{(\alpha)}}$$

辺々差し引くと，

$$\mathrm{P}^{(\alpha)} - \mathrm{P} = \frac{\overline{\mathrm{M}}_x^{(\alpha)} - \frac{1}{\ell+1} \{ \overline{\mathrm{R}}_x^{(\alpha)} - \overline{\mathrm{R}}_{x+\ell+1}^{(\alpha)} \}}{\mathrm{N}_x^{(\alpha)} - \mathrm{N}_{x+n}^{(\alpha)}}$$

上式を ℓ について解けば，

$$\ell = \frac{\overline{\mathrm{R}}_x^{(\alpha)} - \overline{\mathrm{R}}_{x+\ell+1}^{(\alpha)}}{\overline{\mathrm{M}}_x^{(\alpha)} - (\mathrm{P}^{(\alpha)} - \mathrm{P})(\mathrm{N}_x^{(\alpha)} - \mathrm{N}_{x+n}^{(\alpha)})} - 1$$