昭和 47 年度 （問題）

午前の部

1. X_1, X_2, ……, X_n はたがいに独立で，共通な分布関数 $F(x)$ をもつ確率変数として，次の確率変数の分布関数を求めよ。

   (a) $\max(X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n)$

   (b) $\min(X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n)$

2. X_1 および X_2 はたがいに独立で，それぞれ平均 λ_1 および λ_2 のポアソン分布に従う確率変数とする。

   n を正の整数として，$X_1 + X_2 = n$ という条件のもとにおいて，X_1 はどのような分布をするか。

3. たがいに独立な確率変数 X_1，X_2 が区間（0，1）で一様分布しているとき，確率変数 $X_1 + 2X_2$ の密度関数を求めよ。

午後の部

4. 表がでる確率 α（1でも0でもないとする。）のゆがんだ貨幣がある。これを使って，次のようにすると，完全な貨幣すなわち表がでる確率½の貨幣の代用にできることを証明せよ。

   (0) ゆがんだ貨幣を2回なげる。

   (1) 1回目が表，2回目が裏なら，完全な貨幣の表がでたとみなす。

   (2) 1回目が裏，2回目が表なら，完全な貨幣の裏がでたとみなす。

   (3) 2回とも表だけ，または裏だけであったら無効とし，上の(1)または(2)のどちらかがおこるまで，試行(0)をくりかえす。

〔問〕

5.　1次独立なる3つのベクトル a , b , c ,がある。

(i)　$a+b$, $b+c$, $c+a$ も1次独立であることを証明せよ。

(ii)　$a-b$, $b+c$, $c+a$ は1次従属であることを証明せよ。

昭和 47 年度　（解答）

午前の部

1. (a) $Y_1 = \max(X_1, \cdots\cdots, X_n)$ とおき，Y_1 の分布関数を $F_1(x)$ とすると，

$$F_1(x) = P_r(Y_1 < x)$$
$$= P_r(X_1 < x, \cdots\cdots, X_n < x)$$
$$= P_r(X_1 < x) \cdots\cdots P_r(X_n < x)$$
（$\because$ $X_1, \cdots\cdots, X_n$ は互いに独立だから）

$X_1, \cdots\cdots, X_n$ は共通な分布関数 $F(x)$ をもつから，$P_r(X_i < x) = F(x)$
$(i = 1, \cdots, n)$
$$F_1(x) = F(x)^n$$

(b) $Y_2 = \min(X_1, \cdots, X_n)$ とおき，Y_2 の分布関数を $F_2(x)$ とすると

$$F_2(x) = P_r(Y_2 < x)$$
$$= 1 - P_r(Y_2 \geqq x)$$
$$= 1 - P_r(X_1 \geqq x, \cdots, X_n \geqq x)$$
$$= 1 - P_r(X_1 \geqq x) \times \cdots \times P_r(X_n \geqq x)$$
（$\because$ $X_1, \cdots, X_n$ は互いに独立）

(a) と同様に

$$F_2(x) = 1 - \{1 - F(x)\}^n$$

2.
$$P(X_1 = k | X_1 + X_2 = n) = \frac{P(X_1 = k,\ X_1 + X_2 = n)}{P(X_1 + X_2 = n)} = \frac{P(X_1 = k,\ X_2 = n-k)}{P(X_1 + X_2 = n)}$$
$$= \frac{P(X_1 = k)P(X_2 = n-k)}{P(X_1 + X_2 = n)} = e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^k}{k!}\quad e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!} \div \left(e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}\right)$$
$$= \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k}$$

すなわち，平均 $\frac{n\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$ の n 次の 2 項分布

3. 確率変数X$_1$，X$_2$ の同時密度関数は

$$f(x_1,\ x_2)=1\ (0<x_1,\ x_2<1)$$

したがって

$$\begin{aligned}P_r(X<x)&=P_r(x_1+2x_2<x)\\&=\iint_{x_1+2x_2<x} f(x_1,\ x_2)\,dx_1\,dx_2\end{aligned}$$

$$=\begin{cases}0 & : x\leqq 0\\ \frac{1}{4}x^2 & : 0<x\leqq 1\\ \frac{1}{2}(x-\frac{1}{2}) & : 1<x\leqq 2\\ 1-(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}x)^2 & : 2<x\leqq 3\\ 1 & : 3<x\end{cases}$$

故に求める密度関数は

$$f(x)=\frac{d}{dx}F(x)=\begin{cases}0 & : x\leqq 0\\ \frac{1}{2}x & : 0<x\leqq 1\\ \frac{1}{2} & : 1<x\leqq 2\\ \frac{3}{2}-\frac{1}{2}x & : 2<x\leqq 3\\ 0 & : 3<x\end{cases}$$

である。

午後の部

4. その貨幣を２回なげて(1), (2), (3)がおこる確率は，それぞれ

$$\alpha(1-\alpha),\ \alpha(1-\alpha),\ \alpha^2+(1-\alpha)^2=1-2\alpha(1-\alpha)$$

である。

その貨幣を２回なげるという試行を，(1)または(2)のいずれかがおこるまで続けて，(1)が・る確率は，k 回の試行で(3)がおこり，$k+1$ 回目の試行で(1)がおこるという事象の確率をkが０から∞までについて加えればよい。

すなわち，

$$\sum_{k=0}^{\infty}(1-2\alpha(1-\alpha))^k\alpha(1-\alpha)=\frac{\alpha(1-\alpha)}{2\alpha(1-\alpha)}=\frac{1}{2}$$

$$\left(\because\ \frac{1}{2}\leqq 1-2\alpha(1-\alpha)<1\right)$$

これは，実は完全な貨幣の表がでたと判定された事象の確率であった。

5. (i) $\alpha(a+b)+\beta(b+c)+\gamma(c+a)=0$

なら

$(\alpha+\gamma)a+(\alpha+\beta)b+(\beta+\gamma)c=0$

$\therefore\ \alpha+\gamma=0$ (1)

$\alpha+\beta=0$ (2)

$\beta+\gamma=0$ (3)

(1)＋(2)

$0=2\alpha+\beta+\gamma=2\alpha$

$\therefore\alpha=0$

$\therefore\gamma=0,\quad\beta=0$

(ii) $\alpha(a-b)+(b+c)+\gamma(c+a)=0$

$(\alpha+\gamma)a+(-\alpha+\beta)b+(\beta+\gamma)c=0$

$\therefore\ \alpha+\gamma=0$ (1)

$-\alpha+\beta=0$ (2)

$\beta+\gamma=0$ (3)

(2)から $\alpha=\beta$， そうすると(1)も(3)も $\alpha+\gamma=0$

$\therefore \gamma=-\alpha$

結局任意の αにつき

$$\alpha(a-b)+\alpha(b+c)-\alpha(c+a)=0$$