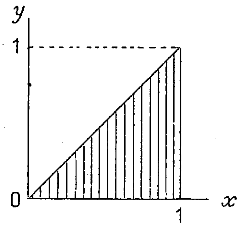
昭和46年度　（問題）

午前の部

1.　確率変数XとYの同時確率密度関数 $f(x, y)$ の値が図の領域内で2であるとき，次の値を計算せよ。

E(X)，E(Y)，V(X)，V(Y)，Cov(X，Y)



2.　確率変数XおよびYは，それぞれ互いに独立で，それぞれが平均 λ および λ' のポアソン分布に従うものとする。

(1)　Z＝X＋Yはどのような分布に従うか。

(2)　Zの平均を求めよ。

3.　半径 r の円周上の定点をCとする。この円周上から2点P，Qを任意にとり，Cを含まぬ弧 $\widehat{PQ}$ の長さを確率変数Zとおく。

(1)　Zの平均を求めよ。

(2)　Zの分散を求めよ。

午後の部

4.　二次形式

$$x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

を直交変換によって標準形に変形せよ。

〔問〕

5.　投票で候補者Pがp票，候補者Qがq票を得たとする（ただし，$p > q$）。開票の間，常にPがQより多い票数を得る確率を求めよ。

昭和 46 年度　（解答）

午前の部

1. $f(x) = x \qquad 0 \leqq x \leqq 1$

$f(y) = 1 - y \qquad 0 \leqq y \leqq 1$

より

$$E(X) = \int_0^1 2x^2\,dx = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$E(X^2) = \int_0^1 2x^3\,dx = 2\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$E(Y) = \int_0^1 2(1-y)\,y\,dy = 2\left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

$$E(Y^2) = \int_0^1 2(1-y)\,y^2\,dy = 2\left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{6}$$

$$E(X\ Y) = \int_0^1\int_0^x 2xy\,dy\,dx = \int_0^1\left[\frac{2xy^2}{2}\right]_0^x dx = \int_0^1 x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

$$= \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{9-8}{18} = \frac{1}{18}$$

$$V(Y) = E(Y^2) - E^2(Y)$$

$$= \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{3-2}{18} = \frac{1}{18}$$

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(X\ Y) - E(X)E(Y)$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4} - \frac{2}{9} = \frac{9-8}{36} = \frac{1}{36}$$

以上により　$E(X) = \frac{2}{3}$，　$E(Y) = \frac{1}{3}$，　$V(X) = \frac{1}{18}$，　$V(Y) = \frac{1}{18}$，　$\mathrm{Cov}(X, Y) = \frac{1}{36}$

2.　任意の自然数 z について

$$P(Z=z)=P(X+Y=z)$$

$$=P(X=0,\ Y=z)+P(X=1,\ Y=z-1)+\cdots+P(X=z,\ Y=0)$$

である。

XとYはたがいに独立だから，任意の自然数 k について

$$P(X=k,\ Y=z-k)=P(X=k)P(Y=z-k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda'}\frac{\lambda'^{\,z-k}}{(z-k)!}$$

が成立つ。

$$\therefore\ P(Z=z)=\sum_{k=0}^{z}P(X=k,\ Y=z-k)=e^{-(\lambda+\lambda')}\sum_{k=0}^{z}\frac{\lambda^k}{k!}\cdot\frac{\lambda'^{\,z-k}}{(z-k)!}$$

$$=e^{-(\lambda+\lambda')}(\lambda+\lambda')^{z}/z!$$

すなわち，(1)　Zはポアソン分布にしたがう。

(2)　Zの平均は $\lambda+\lambda'$ となる。

3.　定点Cから正の向きに測って

$$\overset{\frown}{CP}=X,\quad \overset{\frown}{CQ}=Y$$

とおき，$2\pi r=\ell$ とすれば，

X，Yはともに区間 $(0,\ \ell)$ の上の一様分布に従い，かつ，互に独立である。

(X，Y)の同時分布は，右の第2図の正方形の区域の上の一様分布となる。

ところで，$Z=|Y-X|$ だから，

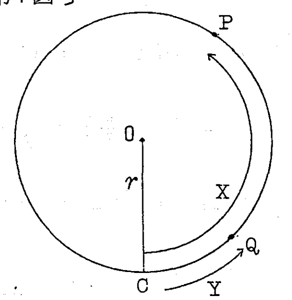
任意の正数 z に対して，$Z\leqq z$ となる確率は

$$P(Z\leqq z)=\frac{\ell^2-(\ell-z)^2}{\ell^2}\quad(0<z<\ell)$$

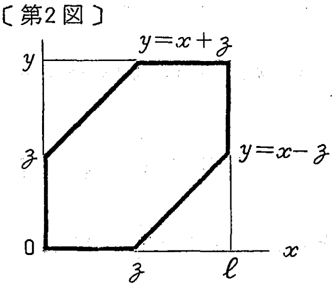
である。

したがって，Zの確率密度を $p(z)$ とおくと，

〔第1図〕



〔第2図〕



$$p(z) = \frac{d}{dz} \ P(Z \leqq z) = \frac{2}{\ell}\left(1 - \frac{z}{\ell}\right)$$

である。

以上により

(1) 平均値

$$E(Z) = \int_0^\ell z\,p(z)\,dz = \int_0^\ell z \cdot \frac{2}{\ell}\left(1 - \frac{z}{\ell}\right) dz = \left[\frac{z^2}{\ell} - \frac{2z^3}{3\ell^2}\right]_0^\ell = \frac{\ell}{3}$$

(2) 分　散

先ず $E(Z^2)$ を求める。

$$E(Z^2) = \int_0^\ell z^2\,p(z)\,dz = \int_0^\ell z^2 \cdot \frac{2}{\ell}\left(1 - \frac{z}{\ell}\right) dz = \left[\frac{2z^3}{3\ell} - \frac{z^4}{2\ell^2}\right]_0^\ell = \frac{\ell^2}{6}$$

そこで，分散は

$$\sigma^2(Z) = E(Z^2) - \left(E(Z)\right)^2 = \frac{\ell^2}{6} - \frac{\ell^2}{9} = \frac{\ell^2}{18}$$

である。

午 後 の 部

4.　与えられた二次形式の行列は

$$S = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & 1 \\ 1, & 1. & 0 \end{pmatrix}$$

である。

先ず，Sの固有値を求める。

$$|xE - S| = \begin{vmatrix} x-1, & 0, & -1 \\ 0, & x-1, & -1 \\ -1, & -1, & x \end{vmatrix} = (x-1)(x-2)(x+1)$$

従って，Sの固有値は　-1，1，2　である。

次に，Sの固有ベクトルを求める。

固有値 -1 について

$$\begin{pmatrix} -2, & 0, & -1 \\ 0, & -2, & -1 \\ -1, & -1, & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a_1 & -a_3 & \\ -2a_2 & -a_3 & \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{pmatrix} = 0, \quad a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$$

から，

$$a_1 = a_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \qquad a_3 = -\frac{2}{\sqrt{6}}$$

すなわち，固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

である。

同様にして固有値1，2に対する固有ベクトルは，それぞれ

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

である。

そこで，直交行列

$$P \equiv \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

でSを変換すれば

$$P'SP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

すなわち，変数変換

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

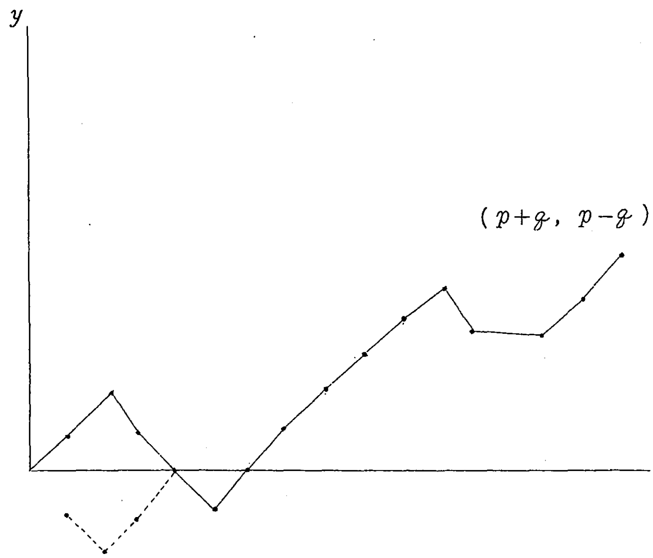
により，与えられた二次形式は

$$-y_1^2 + y_2^2 + 2y_3^2$$

に変形される。

5. 読まれた票の数を x ($x=1, 2, \cdots, p+q$)，その時の (Pの得票数) − (Qの得票数) を y とする。

票読みに従って，(x, y) は原点から出発し右に 1 ずつ，上下に 1 ずつ進みながら終点 ($p+q$, $p-q$) に至る。



その道は全部で ${}_{p+q}C_p$ 通りある。

さて，$\forall y>0$ であるためには，$x=1$ のとき $y=1$ でなければならない。

(1, 1) から ($p+q$, $P-q$) に至る道は全部で ${}_{p+q-1}C_{p-1}$ 通りである。

そのうち，$y=0$ となる場合を含む道の数は（ 1，－1 ）から（ $p+q$，$p-q$ ）への道の数に等しい（はじめて $y=0$ となる点までの鏡像関係から明らか）から，${}_{p+q-1}C_p$ 通りである。

従って，$\forall_y > 0$ である道の数は

$$
{}_{p+q-1}C_{p-1} - {}_{p+q-1}C_p = \frac{(p+q-1)!}{q!\,(p-1)!} - \frac{(p+q-1)!}{(q-1)!\,p!}
$$

$$
= \frac{(p+q)!}{q!\,p!}\left(\frac{p}{p+q} - \frac{q}{p+q}\right)
$$

$$
= \frac{p-q}{p+q}\ {}_{p+q}C_p
$$

よって，求める確率は $\dfrac{p-q}{p+q}$ である。