〔問〕

昭和46年度　（問題）

午前の部

1.　P_x, ℓ_x, ℓ_{x+1} および a_{x+1} をつかって i を得る式を求めよ。

2.　$\mu_{50\frac{1}{4}}$ を，次の二つの仮定について，それぞれ算出せよ。ここに，$\ell_{50}=8,638$，$\ell_{51}=8,569$ とする。

(1) 死亡数が一様に分布する。

(2) ${}_{1-t}q_{x+t}=(1-t)q_x$　　$0\leqq t\leqq 1$

3.　次の式を生命保険の給付を示す算式に導き，かつ，これがどんな給付を示すか述べよ。

(1) $v\ddot{a}_{x:\overline{n}|}-a_{x:\overline{n}|}$

(2) $v\,p_y\,\ddot{a}_{x:y+1:\overline{n}|}-a_{xy:\overline{n}|}$

午後の部

4.　$A_{30}=0.2370$，$\ddot{a}_{30}=20.0797$ および $\ddot{a}_{40}=17.7493$ を知って $P^{(12)}_{30}$ および ${}_{10}V^{(12)}_{30}$ の値を保険料分割払に関する近似式を用いて計算せよ。

5.　t 年後の元利合計が，t に関する n 次の多項式で表わされるものとする。この場合の利力を求めよ。

6. 養老保険の保険料を次の形に分解せよ。

$$P_{x:\overline{n|}} = \overset{*}{P}{}^{\,1}_{x:\overline{n|}} + \frac{1}{\ddot{s}_{\overline{n|}}}$$

この場合，$\overset{*}{P}{}^{\,1}_{x:\overline{n|}}$ は何を意味するか述べよ。

昭和46年度　(解答)

午前の部

1. $$\mathrm{P}_x = \frac{1}{1+a_x} - d = \frac{1}{1+a_x} - (1-v) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

$$a_x = v\,p_x\,(1+a_{x+1}) = v\,\frac{\ell_{x+1}}{\ell_x}\,(1+a_{x+1}) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

上記2式より a_x を消去し，v に関する次の二次方程式を得る。

$$\ell_{x+1}(1+a_{x+1})\cdot v^2 - \left\{\ell_{x+1}(1+\mathrm{P}_x)(1+a_{x+1}) - \ell_x\right\} v - \ell_x \mathrm{P}_x = 0$$

$$v = \frac{\ell_{x+1}(1+\mathrm{P}_x)(1+a_{x+1}) - \ell_x + \sqrt{\ell_{x+1}^2(1+\mathrm{P}_x)^2(1+a_{x+1})^2 - 2\ell_x\ell_{x+1}(1-\mathrm{P}_x)(1+a_{x+1}) + \ell_x^2}}{2\,\ell_{x+1}(1+a_{x+1})}$$

これにより i が得られる。

2. (1) 仮定により，$\ell_{x+t} = \ell_x - t\cdot d_x$

一方，$\mu_{x+t} \fallingdotseq \dfrac{d_x}{\ell_{x+t}}$ であるから，

$$\mu_{50\frac{1}{4}} = \frac{d_{50}}{\ell_{50\frac{1}{4}}} = \frac{\ell_{50} - \ell_{51}}{\ell_{50} - \frac{1}{4}(\ell_{50} - \ell_{51})} = \frac{8{,}638 - 8{,}569}{8{,}638 - \frac{1}{4}(8{,}638 - 8{,}569)}$$

$$= \frac{69}{8{,}620.75}$$

$$\fallingdotseq 0.00800$$

(2) ${}_{1-t}q_{x+t} = (1-t)\,q_x$ であるから

$$\mu_{x+t} \fallingdotseq \frac{q_x}{1-(1-t)q_x} = \frac{q_x}{p_x + {}_tq_x}$$

$$= \frac{d_x}{\ell_{x+1} + t\cdot d_x}$$

$$\mu_{50\frac{1}{4}} \fallingdotseq \frac{d_{50}}{\ell_{51} + \frac{1}{4}d_{50}} = \frac{\ell_{50} - \ell_{51}}{\ell_{51} + \frac{1}{4}(\ell_{50} - \ell_{51})} = \frac{69}{8{,}569 + \frac{1}{4}\times 69} \fallingdotseq 0.00804$$

3. (1) $v\,\ddot{a}_{x:\overline{n|}} - a_{x:\overline{n|}} = \left\{ v\,(N_x - N_{x+n}) - (N_{x+1} - N_{x+n+1}) \right\} \big/ D_x$

$$= \left\{ (v N_x - N_{x+1}) - (v N_{x+n} - N_{x+n+1}) \right\} \big/ D_x$$

$$= (M_x - M_{x+n}) \big/ D_x$$

$$= A^{\;1}_{x:\overline{n|}}$$

これは，保険金期末払，n年定期保険の一時払保険料を表わす。

(2) $v\,p_y\,\ddot{a}_{x:y+1:\overline{n|}} - a_{xy:\overline{n|}} = v \cdot \dfrac{\ell_{y+1}}{\ell_y} \displaystyle\sum_{t=0}^{n-1} v^t \dfrac{\ell_{x+t}}{\ell_x} \cdot \dfrac{\ell_{y+t+1}}{\ell_{y+1}} - \sum_{t=1}^{n} v^t \dfrac{\ell_{x+t}}{\ell_x} \cdot \dfrac{\ell_{y+t}}{\ell_y}$

$$= \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} \frac{\ell_{x+t}}{\ell_x} \cdot \frac{\ell_{y+t+1}}{\ell_y} - \sum_{t=1}^{n} v^t \frac{\ell_{x+t}}{\ell_x} \cdot \frac{\ell_{y+t}}{\ell_y}$$

$$= \sum_{t=1}^{n} v^t \frac{\ell_{y+t}}{\ell_x \ell_y} (\ell_{x+t-1} - \ell_{x+t})$$

$$= \sum_{t=1}^{n} v^t \cdot {}_t p_y \cdot {}_{t-1|} q_x$$

これは，xがyより先に死亡したとき，その年度末においてyが生存している場合に保険金を支払う連生n年定期保険の一時払保険料を表わす。

午 後 の 部

4. (1) 分割払保険料の関係式

$$P_x^{(m)} = P_x + \frac{m-1}{2m} P_x^{(m)} (P_x + d)$$

より，

$$P_x^{(m)} = P_x \Big/ \left\{ 1 - \frac{m-1}{2m} (P_x + d) \right\}$$

を得る。

然るに，$P_x = \dfrac{A_x}{\ddot{a}_x}$，$P_x + d = \dfrac{1}{\ddot{a}_x}$ であるから，

$$P_x^{(m)} = \frac{A_x}{\ddot{a}_x} \Big/ \left\{ 1 - \frac{m-1}{2m} \cdot \frac{1}{\ddot{a}_x} \right\}$$

従って，

$$P_{30}^{(12)} = \frac{0.2370}{20.0797} \Big/ \left\{ 1 - \frac{11}{24} \cdot \frac{1}{20.0797} \right\}$$

$$= 0.0118 \Big/ \left\{ 1 - 0.0228 \right\}$$

$$= \frac{0.0118}{0.9772}$$

$$\doteqdot 0.0121$$

(2) 保険料分割払に関する責任準備金の関係式

$${}_tV_x^{(m)} = {}_tV_x \left(1 + \frac{m-1}{2m} P_x^{(m)} \right)$$

において， ${}_tV_x = 1 - \dfrac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_x}$ なる関係および上記(1)における保険料の値を用いて

$${}_{10}V_{30}^{(12)} = {}_{10}V_{30} \left(1 + \frac{11}{24} P_{30}^{(12)} \right)$$

$$= \left(1 - \frac{\ddot{a}_{40}}{\ddot{a}_{30}} \right) \left(1 + \frac{11}{24} P_{30}^{(12)} \right)$$

$$= \left(1 - \frac{17.7493}{20.0797} \right) \left(1 + \frac{11}{24} \times 0.0121 \right)$$

$$= 0.1161 \times 1.0055$$

$$\doteqdot 0.1167$$

5. 元本を a_0 とする。

題意により t 年後の元利合計額 s_t は次式で与えられる。

$$s_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots\cdots + a_n t^n$$

一方，時点 t における利力を δ_t とすれば，

$$\delta_t = \frac{d \log s_t}{dt}$$

これに前の式を代入して，

$$\delta_t = \frac{d}{dt} \log \left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots\cdots + a_n t^n \right)$$

$$= \frac{a_1 + 2a_2 t + \cdots\cdots + n a_n t^{n-1}}{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots\cdots + a_n t^n}$$

が求める利力である。

6.　今 n 年後に 1 を得るために確定年金として積立てるものとすると，

その掛金は $\dfrac{1}{\ddot{s}_{\overline{n|}}}$ となる。

t 年度の積立金の元利合計は $\dfrac{\ddot{s}_{\overline{t|}}}{\ddot{s}_{\overline{n|}}}$ である。

養老保険において，第 t 年度に死亡が発生した時に，これを保険金の一部に充当すると考えると，危険保険金は $\left(1 - \dfrac{\ddot{s}_{\overline{t|}}}{\ddot{s}_{\overline{n|}}} \right)$ である。

今この死亡保険の現価 $A^{*}{}^{\,1}_{x:\overline{n|}}$ を考えると

$$A^{*}{}^{\,1}_{x:\overline{n|}} = \sum_{1}^{n} \frac{C_{x+t-1}}{D_x} \left(1 - \frac{\ddot{s}_{\overline{t|}}}{\ddot{s}_{\overline{n|}}} \right) = A^{\,1}_{x:\overline{n|}} - \frac{1}{D_x \cdot \ddot{s}_{\overline{n|}}} \cdot \sum_{1}^{n} C_{x+t-1} \cdot \ddot{s}_{\overline{t|}}$$

$$= A^{\,1}_{x:\overline{n|}} - \frac{1}{D_x \cdot \ddot{s}_{\overline{n|}}} \left(\sum_{1}^{n} D_{x+t-1} - D_{x+n} \ddot{s}_{\overline{n|}} \right)$$

$$= A^{\,1}_{x:\overline{n|}} - \left(\frac{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}{\ddot{s}_{\overline{n|}}} - \frac{D_{x+n}}{D_x} \right) = A_{x:\overline{n|}} - \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}{\ddot{s}_{\overline{n|}}}$$

前式を $\ddot{a}_{x:\overline{n|}}$ で割って $P^{*}{}^{\,1}_{x:\overline{n|}} = A^{*}{}^{\,1}_{x:\overline{n|}} / \ddot{a}_{x:\overline{n|}}$ とおくと

$$P^{*}{}^{\,1}_{x:\overline{n|}} = P_{x:\overline{n|}} - \frac{1}{\ddot{s}_{\overline{n|}}}, \qquad \therefore\ P_{x:\overline{n|}} = P^{*}{}^{\,1}_{x:\overline{n|}} + \frac{1}{\ddot{s}_{\overline{n|}}}$$

なお，$P^{*}{}^{\,1}_{x:\overline{n|}}$ は保険金と定期積金との差を死亡保険金とする逓減定期保険の保険料である。