〔問〕

昭和45年度　（問題）

午前の部

1.　よくきった一そろいのカード（52枚）から at random に1枚のカードを抜き出しそれをまた戻すということを繰り返して6枚のカードを抜き出したとき，それらの中にすべてのスーツ（クラブ，ダイヤ，ハートおよびスペードの4種）が少くとも1枚づつ含まれている確率を求めよ。

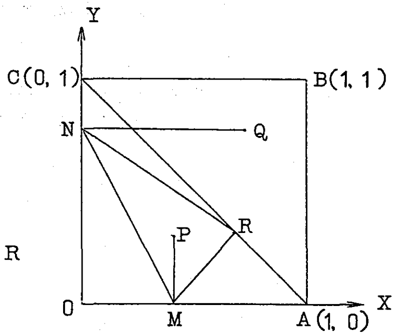
2.　右図の正方形で

(1)　△OAC内

(2)　△ABC内

(3)　$\overline{AC}$上

に at random に各1点をとり，それぞれP，Q，Rとする。



Pから X 軸におろした垂線の足をM，Qから Y 軸におろした垂線の足をNとするとき，△MNRの面積の平均値を求めよ。

3.　湖に全体でN尾の魚がいる。この湖でとった n 尾の魚に赤印をつけて放してやる。しばらくの間をおいてまた同じ数の魚をとったとき，その中に赤印のあるものが100尾得られる確率はいくらか。またこの確率を最大にするNの値はいくらか。ただし，この間魚の増も減もないものとし，$n \geqq 100$ とする。

午後の部

4.　兎 x 匹と狐 y 匹がいる。

狐は，兎を食って増殖し，その瞬間増殖数（増殖数の時間に関する微係数）は兎と狐の数の積 xy に比例するものとし（比例定数は c ），瞬間死亡数（死亡数の時間に関する微係数）

は狐の数 y に比例するものとする（比例定数は d ）。

兎の数の瞬間増殖数は，x に比例し（比例定数は a ），瞬間死亡数は $x\,y$ に比例するもの（比例定数は b ）と仮定する。

(1) 兎と狐の数の変化は，次の４つの段階の周期過程をとることを証明せよ。

i　兎が多数いる。狐の数は増加して兎の数は減少しはじめる。

ii　兎の数が $x=x_0$ にまで減少すると（狐の食物は不十分になり）狐の数は減少しはじめる。

iii　狐の数が $y=y_0$ まで減少すると兎の数は増加しはじめる。　狐は減少しつづける。

iv　兎の数が $x=x_0$ までもどると狐は再び増加しはじめる。そして $y=y_0$ まで増加する。

(2) x_0，y_0 をそれぞれ a，b，c，d で表わせ。

(3) 兎と狐のそれぞれの一周期を通じての平均数を求めよ。
ただし，モデルの設定上，x，y は整数以外の実数をもとり得るものとする。

5.　次のような差分方程式がある。

$$u(x+2)+a\,u(x+1)+b\,u(x)=0 \qquad (b\neq 0)$$

(1) $u(x)=\rho^x$（$\rho\neq 0$）とおいて，ρ の値を求めよ。

(2) ρ の値を ρ_1，ρ_2 とし，c_1，c_2 を任意定数とすれば，上記差分方程式の一般解は次の式で与えられることを証明せよ。

$\rho_1\neq\rho_2$ のときは　$u(x)=c_1\rho_1^x+c_2\rho_2^x$

$\rho_1=\rho_2$ のときは　$u(x)=(c_1+c_2x)\rho_1^x$

昭和45年度　(解答)

午前の部

1.　事象Aをすべてのスーツが現われること，事象Bを少くとも一つのスーツが現われないこととすれば，

$$B = \overline{A}$$

である。しかも，BとAは mutually exclusive であるから，

$$P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B) = 1$$

$$\therefore \ P(A) = 1 - P(B)$$

である。

ここで，事象Bを，

B_1　クラブが全然現われない。

B_2　ダイヤが全然現われない。

B_3　ハートが全然現われない。

B_4　スペードが全然現われない。

に分解すると，

$$B = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4$$

である。

すると，明らかに次の関係が成り立つ。

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4) \\ &= \sum P(B_i) - \sum P(B_i, B_j) + \sum P(B_i, B_j, B_k) \\ &\quad - \sum P(B_i, B_j, B_k, B_\ell) \qquad \text{〔有限加法定理〕} \end{aligned}$$

(ここに，Σ記号はすべての相異なる i，j，k，ℓ の組合せについての合計であることを示す。)

$$P(B) = \binom{4}{1}\left(\frac{3}{4}\right)^6 - \binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^6 + \binom{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^6 - \binom{4}{4} \times 0$$

$$= \frac{3^6}{4^5} - \frac{3}{2^5} + \frac{1}{4^5} = \frac{634}{1024} \fallingdotseq 0.619$$

$$\therefore \ P(A) = 1 - 0.619 = 0.381$$

答　0.381

2.　P，Q，Rはいずれも与えられた範囲内で一様に分布するから，MのX座標，NのY座標，RのX座標の確率分布は面積比及び線分比によりそれぞれ

$$P(M_X \leqq x) = \frac{1}{2}\{1-(1-x)^2\} \Big/ \frac{1}{2} = 2x - x^2 = \int_0^x (2-2x)\,dx$$

$$P(N_Y \leqq y) = \frac{1}{2}y^2 \Big/ \frac{1}{2} = y^2 = \int_0^y 2y \cdot dy$$

$$P(R_X \leqq z) = \sqrt{2}z \big/ \sqrt{2} = z = \int_0^z 1 \cdot dz$$

$$\therefore\ \overline{\triangle MNR} = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \triangle MNR(x,\ y,\ z)\cdot(2-2x)\cdot 2y \cdot 1 \cdot dx\,dy\,dz$$

$$= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{2}\{1-xy-(1-x)(1-z)-(1-y)z\}\,4y(1-x)\,dx\,dy\,dz$$

$$= \frac{5}{36}$$

3.　N尾の魚の中からn尾をとり出す組合せは$\binom{N}{n}$通りある。

また「このn尾の中に100尾の赤印のついた魚がある」ということは，「湖全体でn尾いる赤印のついた魚の中から100尾と，その残り $N-n$ 尾の赤印のつかない魚の中から$n-100$尾を（合わせてn尾）選びだす。」ということであるからその組合せは

$$\binom{n}{100}\cdot\binom{N-n}{n-100} \quad \text{通りである。}$$

従って求める確率P(N)は $\dfrac{\binom{n}{100}\binom{N-n}{n-100}}{\binom{N}{n}}$ なる超幾何分布である。

$$P(N) - P(N-1) = P(N)\left(1 - \frac{P(N-1)}{P(N)}\right)$$

$$1 - \frac{P(N-1)}{P(N)} = 1 - \frac{(N-2n+100)N}{(N-n)^2} = \frac{n^2-100N}{(N-n)^2}$$

$n^2 > 100N$ なる整数Nについては P(N)は単調増加函数。

$n^2 < 100N$ なる整数Nについては P(N)は単調減少函数。

従ってP(N)の値が最大になるNの値は

$\frac{n^2}{100}$ が整数の 時 は　　$N=\frac{n^2}{100}$ と $\frac{n^2}{100}-1$

$\frac{n^2}{100}$ が整数でない時は　$N=\left[\frac{n^2}{100}\right]$

〔注〕　$\frac{n^2}{100}$ が整数でない時はP(N)を最大にする値として $N=\left[\frac{n^2}{100}\right]$, $\left[\frac{n^2}{100}\right]+1$

が考えられるが両者を比較してみると

$$P\left(\left[\frac{n^2}{100}\right]+1\right)-P\left(\left[\frac{n^2}{100}\right]\right)=\frac{n^2-100\left(\left[\frac{n^2}{100}\right]+1\right)}{(N-n)^2}$$

$$<\frac{n^2-100\cdot\frac{n^2}{100}}{(N-n)^2}$$

従って，$N=\left[\frac{n^2}{100}\right]$ の時 P(N)は最大値をとる。

午 後 の 部

4.　解法は，どの様な方法でもよい。ここでは解析的な手法まで求めていないが，一応解析的な解を記すと次のとおり。

(1)　題意により　$\frac{dx}{dt}=ax-bxy=x(a-by)$ ……………… ①

$$\frac{dy}{dt}=cxy-dy=y(cx-d) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

両式からでも x_0, y_0 が求まるが，ここでは軌跡に対応する方程式を求めてみる。

①，②より

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y(cx-d)}{x(a-by)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

$$\frac{a-by}{y}\,\frac{dy}{dx}+\frac{d-cx}{x}=0$$

積分して　$a\log y-by+d\log x-cx=\log k$

$$\frac{x^d}{e^{cx}}\cdot\frac{y^a}{e^{by}}=k \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

均衡点 ($\frac{dx}{dt}=0$ および $\frac{dy}{dt}=0$ を解いて得た$(x\ y)$) は点 (0, 0) と E $(\frac{d}{c}\ \frac{a}{b})$ である。

今題意により $x(t)>0$, $y(t)>0$ であるので E $(\frac{d}{c},\frac{a}{b})$ のみに着目。Eの近くの軌跡の状態をみる。

$$\left.\begin{aligned} x &= u+\frac{d}{c} \\ y &= v+\frac{a}{b} \end{aligned}\right\} \text{とおくと}\quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{du}{dt} = -\left(u+\frac{d}{c}\right)bv \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{dv}{dt} = cu\left(v+\frac{a}{b}\right) \end{aligned}$$

これ等の方程式の一次の部分は

$$\frac{du}{dt}\approx-\frac{bd}{c}v \qquad \frac{dv}{dt}\approx\frac{ac}{b}u \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{⑤}$$

$$\frac{d^2u}{dt^2}\approx-\frac{bd}{c}\cdot\frac{dv}{dt}=-\frac{bd}{c}\cdot\frac{ac}{b}u=-adu$$

即ち, $\frac{d^2u}{dt^2}\fallingdotseq -adu$ で運動は周期的である。

即ち $u=A\sin(\sqrt{ad}\,t+k)$

出発時 $t=0$ を $u=0$ とおくと

$$\left.\begin{aligned} u &= A\sin(\sqrt{ad}\,t) \\ v &= B\cos(\sqrt{ad}\,t) \end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{u^2}{A^2}+\frac{v^2}{B^2}=1$$

即ち第1次近似では軌跡は楕円であり，運動の周期は $\frac{2\pi}{\sqrt{ad}}$ である。

(2) $k=\frac{x^d}{e^{cx}}\cdot\frac{y^a}{e^{by}}$ は $x\ y$ に関し対称的な性格 (グラフは必ずしも対称形ではない)。

一方についての一般性は他方についても成立つ。

$f(x)=\frac{x^d}{e^{cx}}$ のグラフの形態を求めると

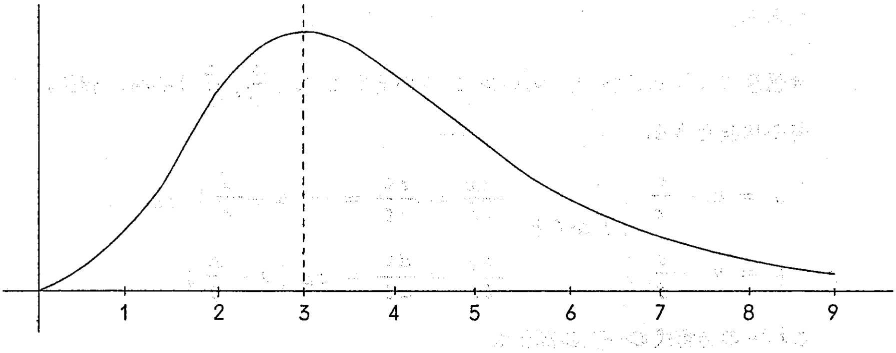
$f'(x)=\left(\frac{d}{x}-c\right)f(x)$ $\quad f'(x)=0$ をとくと $x=\frac{d}{c}$

$f''(x)=\left[\left(\frac{d}{x}-c\right)^2-\frac{d}{x^2}\right]f(x)$

$f''\left(\frac{d}{c}\right)=-\frac{c^2}{d}f\left(\frac{d}{c}\right)<0$ 　即ち, $x=\frac{d}{c}$ で極大値をとり, 次のようなグラ

フになり，夫々の値は最大値をのぞいて２度づつとられている。

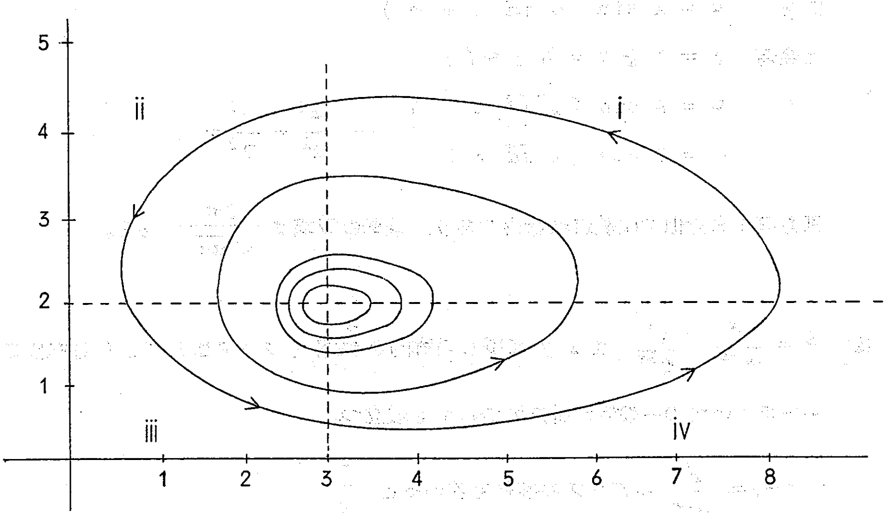
（例）



$$f(x)=\frac{x^{d}}{e^{cx}} \qquad c=1 \qquad d=3$$

従って，yを或る可能な値に固定すれば２つのxの値が存在し，可能なxの値に対して２つのxの値が存在する。

従って，単純な閉曲線を得る。



又，yは最大値と最小値を$x=\frac{d}{c}$でとり，同様にしてxは最大値と最小値を$y=\frac{a}{b}$でとる。

（例）　$$\frac{x^{d}}{e^{cx}}\cdot\frac{y^{a}}{e^{by}}=k \quad \left(\begin{array}{ll} a=4 & b=2 \\ c=1 & d=3 \end{array}\right)$$

又，式①より　$y \lesseqgtr \frac{a}{b}$　に従って　$\frac{dx}{dt} \gtreqless 0$

よって軌跡の上半分ⅰ，ⅱ区域ではxは減少するが下半分ⅲ，ⅳ区域では増加する。

(2)　上記(1)より　　$x_0 = \frac{d}{c}$　　$y_0 = \frac{a}{b}$

(3)　平均値 $\overline{x}$，$\overline{y}$ を求める。運動は周期的であるから一周期Tで平均をとる。

先づ式①より

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = a - by$$

$$\int_0^T \frac{1}{x}\frac{dx}{dt}\cdot dt = \int_0^T (a - by)\,dt$$

$$\log x(T) - \log x(0) = aT - b\int_0^T y\,dt$$

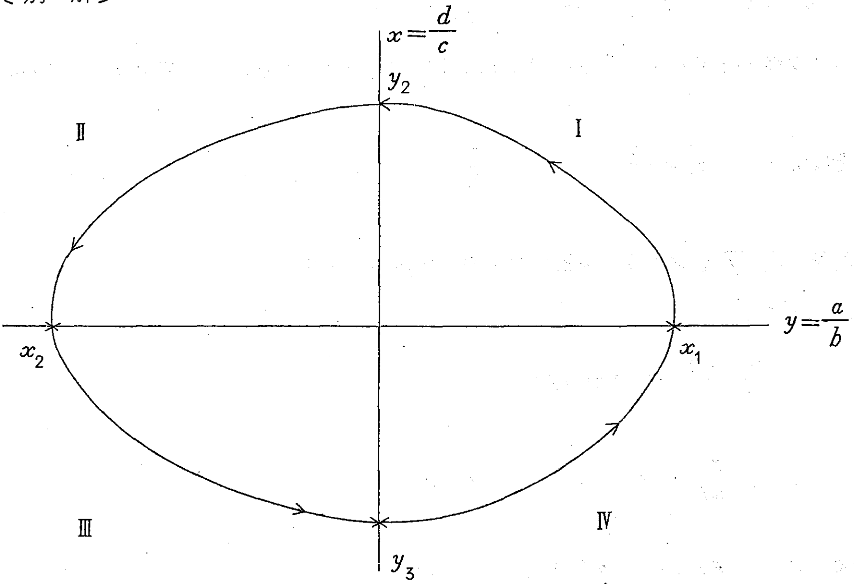
$$= aT - bT\overline{y}$$

$x(T) = x(0)$ より　　$a - b\overline{y} = 0$

$$\overline{y} = \frac{a}{b}$$

全く同様にして　　$\overline{x} = \frac{d}{c}$

〔別　解〕



$y=\frac{a}{b}$ の時の $x>\frac{d}{c}$ の x の値を x_1 とおく。

（前記グラフの例より $x=\frac{d}{c}$ より $\left.\begin{array}{l}\text{大なる解}\\\text{小なる解}\end{array}\right\}$ が二つ存在する。）

上記の様に　$x=\frac{d}{c}$，　$y=\frac{a}{b}$ を両軸とし，区間をⅠ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳに分けて（x，y）の変化を考察する。

先づ初期値（x_1，$\frac{a}{b}$）から出発し，yが増加して行くと

Ⅰ　x，yは共に正，当分の間　$cx-d>0$，$a-by<0$　より

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y(cx-d)}{x(a-by)}<0$$　即ちxは減少を続ける。

（厳密には $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{acx-bdy}{x^2(a-by)^2}\cdot\frac{dy}{dx}$ であり，マイナスの値から増加してプラスになり（$\frac{d}{c}$，$\frac{a}{b}$）に対し凸なカーブとなるが本問はカーブの形態まで求めていない。）

Ⅱ　$x=\dfrac{d}{c}$になると $\dfrac{dy}{dx}=0$ であり　yの増加はとどまる。

この時点のyの値をy_1とおく。　xが更に減少を続けて行くと

$$cx-d<0 \qquad a-by<0 \quad より \quad \frac{dy}{dx}>0$$

即ち，yも減少を続ける。

Ⅲ　$y=\dfrac{a}{b}$ になると $\dfrac{dx}{dy}=0$ であり，xの減少はとどまる。

この時点のxの値をx_1とおく。　yがこの時点より更に減少を続けて行くと　$cx-d<0$

$a-by>0$ より $\dfrac{dy}{dx}<0$

即ち，xも増加を続ける。

Ⅳ　$x=\dfrac{d}{c}$ になると $\dfrac{dy}{dx}=0$ であり，yの減少はとどまる。

この時点のyの値をy_2とおく。　xがこの時点より更に増加を続けて行くと　$cx-d>0$

$a-by>0$　より $\dfrac{dy}{dx}>0$

即ち，yも増加を続ける。

$y=\dfrac{a}{b}$ になると $\dfrac{dx}{dy}=0$ となり，xの増加はとどまる。

この時点のxの値をx'_1とおくと，前記グラフより $x_1=x'_1$

即ち，（x，y）は点$\left(\dfrac{a}{b},\ \dfrac{d}{c}\right)$の回りに周期運動をくりかえす。

5.　(1)　$u(x)=\rho^x$を原式 $f(u(x))=u(x+2)+au(x+1)+bu(x)$ に代入すると

$$f(\rho^x)=\rho^{x+2}+a\rho^{x+1}+b\rho^x=\rho^x(\rho^2+a\rho+b)$$

$$\rho^x\neq 0 \text{ より} \qquad \rho^2+a\rho+b=0 \qquad \rho=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$$

(2)　次のⅰ〕ⅱ〕を証明すればよい。

ⅰ〕この解$u(x)$が$f(x)=0$ の解であること

$\circ\ \rho_1 \neq \rho_2$ の時

$$f(c_1\rho_1^x + c_2\rho_2^x) = c_1 f(\rho_1^x) + c_2 f(\rho_2^x) = c_1\cdot 0 + c_2\cdot 0 = 0$$

$\circ\ \rho_1 = \rho_2$ の時

$$f[(c_1 + c_2 x)\rho_1^x] = c_1 f(\rho_1^x) + c_2 f(x\rho_1^x) = c_2 f(x\rho_1^x)$$

ここで $f(x\rho_1^x) = (x+2)\rho_1^{x+2} + a(x+1)\rho_1^{x+1} + bx\rho_1^x$

$$= x f(\rho_1^x) + (2\rho_1 + a)\rho_1^{x+1}$$

ρ_1 は等根であるから $\rho_1 = -\dfrac{a}{2}$ $\quad\therefore\ 2\rho_1 + a = 0$

従って $f(x\rho_1^x) = 0$ より $f[(c_1 + c_2 x)\rho_1^x] = 0$

ii〕 解の一意性の証明として任意に $u(0)$, $u(1)$ を与え得ることを示す。

（この場合 $u(2)$が一意的に定まり，以下帰納的に $u(x)$が定まる。）

$\circ\ \rho_1 \neq \rho_2$ の時 $\quad u(0) = c_1 + c_2$

$$u(1) = c_1\rho_1 + c_2\rho_2$$

$u(0) = \alpha$, $u(1) = \beta$ とおくと $\quad \alpha = c_1 + c_2$

$$\beta = c_1\rho_1 + c_2\rho_2$$

これを c_1, c_2 についてとくと $\rho_1 \neq \rho_2$ であるから

$$c_1 = \frac{\beta - \rho_2\alpha}{\rho_1 - \rho_2} \qquad c_2 = \frac{\alpha\rho_1 - \beta}{\rho_1 - \rho_2}$$ と求められる。

従って，任意に α, βを与える時，上式より c_1, c_2 を決めれば

$u(0) = c_1 + c_2 = \alpha \qquad u(1) = c_1\rho_1 + c_2\rho_2 = \beta$ となり，

上記条件を満たす。

$\circ\ \rho_1 = \rho_2$ の時 $\quad$ 全く同様にして $u(0) = \alpha \quad u(1) = \beta$ とおくと

$$c_1 = \alpha \qquad \beta = (\alpha + c_2)\rho_1$$

等根の条件　$a^2=4b$ で　$b\neq 0$ より　$a\neq 0$　従って，$\rho_1=\dfrac{a}{2}\neq 0$

$$\therefore\quad \frac{\beta}{\rho_1}=\alpha+c_2 \qquad\qquad c_2=\frac{\beta}{\rho_1}-\alpha$$

従って，任意の α，β を与えた時，上式より c_1　c_2 を定めると

$u(0)=\alpha$，　$u(1)=\beta$　　となって上記条件を満たす。

。x が整数値でない場合は，$x=[x]+\alpha$ とおいて，上記と同様に任意の $u(\alpha)$，$u(\alpha+1)$ を与え得ることが示される。

〔別　解〕

(1)　$\rho^2+a\rho+b=0$　の根を　ρ_1，ρ_2　とすると

根と係数との関係から　　$\rho_1+\rho_2=-a$　　$\rho_1\rho_2=b$

$$\therefore\quad f(u(x))=u(x+2)-(\rho_1+\rho_2)u(x+1)+\rho_1\rho_2\,u(x)$$

$$=[u(x+2)-\rho_1u(x+1)]-\rho_2[u(x+1)-\rho_1u(x)]$$

$u(x+1)-\rho_1u(x)=v(x)$　とおくと，原式は

$$v(x+1)-\rho_2v(x)=0$$

$x=[x]+\alpha$　とおくと　（〔　〕はガウス記号）上式を漸化的にといて

$$v(x)=\rho_2v(x-1)=\rho_2^2v(x-2)=\cdots=\rho_2^{[x]}v(\alpha)$$

$c=v(\alpha)/\rho_2^{\alpha}$　とおくと

$$v(x)=\rho_2^{[x]}\cdot c\rho_2^{\alpha}=c\rho_2^{[x]+\alpha}=c\rho_2^{x}$$

(2)　従って，　$u(x+1)-\rho_1u(x)=c\rho_2^{x}$　　をとけばよい。

$$u([x]+\alpha)=\rho_1u([x]-1+\alpha)+c\rho_2^{[x]-1+\alpha}$$

$$=\rho_1[\rho_1u([x]-2+\alpha)+c\rho_2^{[x]-2+\alpha}]+c\rho_2^{[x]-1+\alpha}$$

……… 以下漸化的にといて

$$u([x]+\alpha)=\rho_1^{[x]}u(\alpha)+c\rho_2^{\alpha}(\rho_1^{[x]-1}+\rho_1^{[x]-2}\rho_2+\cdots+\rho_2^{[x]-1})$$

(3)の a　$\rho_1 \fallingdotseq \rho_2$ の場合

$$u([x]+\alpha)=\rho_1^{[x]}u(\alpha)+c\rho_2^{\alpha}\cdot\frac{\rho_2^{[x]}-\rho_1^{[x]}}{\rho_2-\rho_1}$$

$$=\left(u(\alpha)-\frac{c\rho_2^{\alpha}}{\rho_2-\rho_1}\right)\rho_1^{[x]}+\frac{c}{\rho_2-\rho_1}\rho_2^{\alpha}\rho_2^{[x]}$$

$$\left.\begin{aligned}u(\alpha)-\frac{c\rho_2^{\alpha}}{\rho_2-\rho_1}&=c_1\rho_1^{\alpha}\\ \frac{c}{\rho_2-\rho_1}&=c_2\end{aligned}\right\}$$

になるように c_1, c_2 を定めれば,

$$u(x)=c_1\rho_1^{x}+c_2\rho_2^{x}$$

(3)の b　$\rho_1=\rho_2$ の場合

$$u([x]+\alpha)=\rho_1^{[x]}u(\alpha)+c[x]\rho_1^{\alpha}\rho_1^{[x]-1}$$

$$=\left\{\frac{u(\alpha)}{\rho_1^{\alpha}}+\frac{c[x]}{\rho_1}\right\}\rho_1^{[x]+\alpha}$$

$$\frac{u(\alpha)}{\rho_1^{\alpha}}+\frac{c[x]}{\rho_1}=c_1+c_2([x]+\alpha)$$

即ち, $c_2=\dfrac{c}{\rho_1}$, $c_1=\dfrac{u(\alpha)}{\rho_1^{\alpha}}-\dfrac{c\alpha}{\rho_1}$ とおけば

$$u(x)=(c_1+c_2x)\rho_1^{x}$$