昭和 45 年度　(問題)

午前の部

1.　次を証明せよ。

(a)　$A_x^{ai} = \dfrac{M_x^{ii} - D_x^{ii} \cdot A_x^i}{D_x^{aa}}$

(b)　$a_x^{ai} = \dfrac{N_x^{ii} - D_x^{ii} \cdot \ddot{a}_x^i}{D_x^{aa}}$

2.　3つの死亡表の死力の間に $6\mu_x = 3\mu_x' = 2\mu_x''$ なる関係があるとき，次式が成り立つことを証明せよ。

$$ {}_tp_{\overline{xxx}} = 3\,{}_tp_x - 3\,{}_tp_x' + {}_tp_x'' $$

3.　x 歳加入 n 年満期全期年払の一般化された養老保険があって，第 t 年度死亡および満期に対する保険金額（期末払）は，それぞれ S_{x+t} および S_{x+n}，かつ，${}_tV$ を t 年度末責任準備金として，

$t \leqq t'$ に対しては　　$0 \leqq {}_tV \leqq {}_{t'}V$

が成り立つとする。

この保険契約の責任準備金は，利率が増加するとき，どのような影響を受けるか。

〔問〕

午後の部

4題中3題を選んで解答せよ。

4. 加入年齢x歳，保険期間n年，保険金即時払養老保険（全期年払）に，死亡時に既払込保険料のk_1倍，満期時にk_2倍の返還を追加することを考えたときの営業保険料を求めよ。この場合，純保険料Pと営業保険料P′との関係式は $P'=\dfrac{P+a}{1-b}$ の形式とする。

5. 死因iによる死力$\mu_x^{(i)}$が，その死因が消滅したときの死力$\mu_x^{(-i)}$のC倍であるとするとき，被保険者(x)が死因iによって死亡したときは$1+k$，それ以外の死因によって死亡したときは1なる保険金を即時に支払うn年定期保険の年払純保険料を求めよ。

6. 初年度定期式責任準備金について，終身払込終身保険（保険金期末払）を例に次の問に答えよ。この場合，営業保険料は，$\alpha\cdot\beta\cdot\gamma$一方式で算出されているものとする。
   (a) 新契約費の限度$\widetilde{\alpha}$および責任準備金の算式を求めよ。
   (b) 加入年齢x歳の群団に関して，(a)の責任準備金の算式を用いて，第1保険年度および第2保険年度の利源分析（三利源）を算式で示せ。この場合，この群団の保険金額は第1保険年度始S_0，第1保険年度末S_1，第2保険年度末S_2で表わし，死亡以外の消滅はないものとし，第1保険年度および第2保険年度の事業費，利息配当金収入はE'_1，I'_1，およびE'_2，I'_2とする。

7. 定年退職者に終身年金を給付する年金制度の加入者集団について，定常状態を仮定するとき，綜合保険料方式（閉鎖型）による保険料は，加入年齢方式による標準保険料に収束することを証明せよ。

昭和 45 年度　（解答）

午前の部

1. (a) 被保険者が廃疾体として死亡する条件で，その年度末に保険金を支払う x 歳の健康体者に対する保険金額 1 の一時払純保険料の算式であるから，

$$A_x^{ai} = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} \ {}_{t|}q_x^{ai}$$

$$= \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} \frac{d_{x+t}^{ii} - \ell_x^{ii} \ {}_{t|}q_x^{i}}{\ell_x^{aa}}$$

$$= \sum_{t=0}^{\infty} \frac{v^{x+t+1} \ d_{x+t}^{ii} - v^x \ell_x^{ii} \cdot v^{t+1} \ {}_{t|}q_x^{i}}{v^x \ \ell_x^{aa}}$$

$$= \frac{M_x^{ii} - D_x^{ii} \cdot A_x^{i}}{D_x^{aa}}$$

ここに，　$M_x^{ii} = \sum_{t=0}^{\infty} v^{x+t+1} \ d_{x+t}^{ii}$

$$D_x^{ii} = v^x \ \ell_x^{ii}$$

$$D_x^{aa} = v^x \ \ell_x^{aa}$$

$$A_x^{i} = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} \ {}_{t|}q_x^{i}$$

(b) 現在 x 歳の健康者が廃疾となってから生存している間支払われる年金の年金現価であるから，

$$a_x^{ai} = \sum_{t=0}^{\infty} v^t \ {}_tp_x^{ai}$$

$$= \sum_{t=0}^{\infty} v^t \frac{\ell_{x+t}^{ii} - \ell_x^{ii} \cdot {}_tp_x^{i}}{\ell_x^{aa}}$$

$$= \sum_{t=0}^{\infty} \frac{v^{x+t} \ell_{x+t}^{ii} - v^x \ \ell_x^{ii} \cdot v^t \ {}_tp_x^{i}}{v^x \ \ell_x^{aa}}$$

$$= \frac{N_x^{ii} - D_x^{ii}\ \ddot{a}_x^{i}}{D_x^{aa}}$$

ここに, $N_x^{ii} = \sum_{t=x}^{\infty} v^{x+t} \cdot \ell_{x+t}^{ii}$

2.　一般に $m\mu_x = n\mu'_x$ なる関係があるときは

$${}_t p_{xx\cdots(m)} = ({}_t p_x)^m = \left(e^{-\int_0^t \mu_{x+s}\,ds}\right)^m = e^{-\int_0^t m\mu_{x+s}\,ds}$$

$$= e^{-\int_0^\lambda n\mu'_{x+s}\,ds} = \left(e^{-\int_0^t \mu'_{x+s}\,ds}\right)^n$$

$$= ({}_t p'_x)^n$$

$$= {}_t p'_{xx\cdots(n)}$$

なる関係が成立する。

従って，与えられた条件から次の等式が成り立つ。

$${}_t p_{xx} = {}_t p'_x$$

$${}_t p_{xxx} = {}_t p'_x$$

一方，${}_t p_{\overline{xxx}}$ は，次のように変型される。

$${}_t p_{\overline{xxx}} = 3\,{}_t p_x - 3\,{}_t p_{xx} + {}_t p_{xxx}$$

$$\therefore\ {}_t p_{\overline{xxx}} = 3\,{}_t p_x - 3\,{}_t p'_x + {}_t p''_x$$

3.　責任準備金の漸化式を考える。

$$({}_t V + P)(1+i) = q_{x+t} \cdot S_{x+t+1} + p_{x+t} \cdot {}_{t+1}V \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

ここにPはこの保険の全期払込年払保険料とする。

かつ，$_{n}V = S_{x+n} \quad _{0}V=0$

増加させた利率をi'とし，かつ，$\triangle i = i' - i$ とする。（以下△の使い方は増加させた利率による関数から前の利率による同じ関数を減ずる記号とする。）

i'による漸化式は

$$({}_{t}V'+P')(1+i') = q_{x+t} \cdot S_{x+t+1} + p_{x+t} \cdot {}_{t+1}V' \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad ②$$

②－①を作ると，

$$(1+i')\triangle({}_{t}V+P)+({}_{t}V+P)\triangle i = p_{x+t} \cdot \triangle {}_{t+1}V$$

$$(1+i')\triangle {}_{t}V+(1+i')\triangle P + ({}_{t}V+P)\triangle i = p_{x+t} \cdot \triangle {}_{t+1}V \quad \cdots\cdots\cdots \quad ③$$

$(1+i')\triangle P$ ： tに関して Const

$({}_{t}V+P)\triangle i$ ： $\triangle i > 0$，および条件からtに関する増加関数

ここで，$R_t = (1+i')\triangle P + ({}_{t}V+P)\triangle i$ とおくと

R_tは増加関数となり③式は

$$(1+i')\triangle {}_{t}V + R_t = p_{x+t} \cdot \triangle {}_{t+1}V$$ となる。

ここで

i）$R_t > 0$ とすると

$(1+i')\triangle {}_{0}V + R_0 = p_x \cdot \triangle {}_{1}V > 0 \qquad (\because\ \triangle {}_{0}V = 0 \quad R_0 > 0)$

$(1+i')\triangle {}_{1}V + R_1 = p_{x+1} \cdot \triangle {}_{2}V > 0 \qquad (\because\ \triangle {}_{1}V > 0 \quad R_1 > 0)$

以下同様にして $\triangle {}_{n}V > 0$ 　これは矛盾

$\therefore$ R_t は常に正ではない。

ii）$R_t < 0$ とすると

i）と同様にして $\triangle {}_{n}V < 0$ となるから

R_t は常に負ではない。

故に，R_t は増加関数である事を考えると，はじめ負で次に正となる。

即ち，$\exists t_0$ ： $R_0 \leqq R_1 \leqq R_2 \leqq \cdots\cdots \leqq R_{t_0} \leqq 0 \leqq R_{t_0+1} \leqq \cdots\cdots \leqq R_{n-1}$

ところで，

$$0 \geqq (1+i')\triangle_0 V + R_0 = p_x \cdot \triangle_1 V \qquad (\triangle_0 V = 0 \quad R_0 \leqq 0)$$

$$0 \geqq (1+i')\triangle_1 V + R_1 = p_{x+1} \cdot \triangle_2 V \qquad (\text{上式}, \quad R_1 \leqq 0)$$

以下同様にして

$$0 \geqq (1+i')\triangle_{t_0} V + R_{t_0} = p_{x+t_0} \cdot \triangle_{t_0+1} V$$

一方，

$$0 \geqq p_{x+n-1} \cdot \triangle_n V - R_{n-1} = (1+i')\triangle_{n-1} V \qquad (\triangle_n V = 0 \quad R_{n-1} \geqq 0)$$

$$0 \geqq p_{x+n-2} \cdot \triangle_{n-1} V - R_{n-2} = (1+i')\triangle_{n-2} V \qquad (\text{上式}, \quad R_{n-2} \geqq 0)$$

以下同様にして

$$0 \geqq p_x \cdot \triangle_{t_0+1} V - R_{t_0+1} = p_{x+1} \cdot \triangle_{t_0} V$$

以上を整理して，いずれの場合においても

$$\triangle_t V \leqq 0 \qquad i.\ e. \qquad {}_tV' \leqq {}_tV$$

即ち，

責任準備金は利率の増加に従って減少する。

〔別　解〕

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{C_{x+t}}{D_{x+\tau}}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(v^{t+1-\tau}\frac{d_{x+t}}{\ell_{x+\tau}}\right) = (t+1-\tau)\,v^{-1}\frac{C_{x+t}}{D_{x+\tau}}$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D_{x+t}}{D_{x+\tau}}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(v^{t-\tau}\frac{\ell_{x+t}}{\ell_{x+\tau}}\right) = (t-\tau)\,v^{-1}\frac{D_{x+t}}{D_{x+\tau}}$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(P\cdot\sum_{t=0}^{n-1}\frac{D_{x+t}}{D_x}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\sum_{t=0}^{n-1}\frac{C_{x+t}\cdot S_{x+t}}{D_x} + \frac{D_{x+n}\cdot S_{x+n}}{D_x}\right)$$

$$= v^{-1}\left\{\sum_{t=0}^{n-1}(t+1)\frac{C_{x+t}\cdot S_{x+t}}{D_x} + n\frac{D_{x+n}\cdot S_{x+n}}{D_x}\right\}$$

一方 $\displaystyle \frac{\partial}{\partial v}\left(P\sum_{t=0}^{n-1}\frac{D_{x+t}}{D_x}\right) = \frac{\partial P}{\partial v}\cdot\sum_{t=0}^{n-1}\frac{D_{x+t}}{D_x} + P\cdot v^{-1}\sum_{t=0}^{n-1}t\frac{D_{x+t}}{D_x} + Pv^{-1}\sum_{t=0}^{n-1}\frac{D_{x+t}}{D_x}$

$$-\mathrm{P}v^{-1}\sum_{t=0}^{n-1}\frac{\mathrm{D}_{x+t}}{\mathrm{D}_x}$$

即ち $$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial v}\cdot\sum_{t=0}^{n-1}\frac{\mathrm{D}_{x+t}}{\mathrm{D}_x}=v^{-1}\left\{\sum_{t=0}^{n-1}\left(\sum_{\nu=t}^{n-1}\frac{\mathrm{C}_{x+\nu}\cdot\mathrm{S}_{x+\nu}}{\mathrm{D}_x}+\frac{\mathrm{D}_{x+n}\cdot\mathrm{S}_{x+n}}{\mathrm{D}_x}-\mathrm{P}\sum_{\nu=t}^{n-1}\frac{\mathrm{D}_{x+\nu}}{\mathrm{D}_x}\right)\right.$$

$$\left.+\mathrm{P}\sum_{t=0}^{n-1}\frac{\mathrm{D}_{x+t}}{\mathrm{D}_x}\right\}$$

$$=v^{-1}\sum_{t=0}^{n-1}({}_t\mathrm{V}+\mathrm{P})\frac{\mathrm{D}_{x+t}}{\mathrm{D}_x}$$

ところで$$\frac{\partial}{\partial v}({}_t\mathrm{V})=\frac{\partial}{\partial v}\left(\sum_{\nu=t}^{n-1}\frac{\mathrm{C}_{x+\nu}\cdot\mathrm{S}_{x+\nu}}{\mathrm{D}_{x+t}}+\frac{\mathrm{D}_{x+n}\cdot\mathrm{S}_{x+n}}{\mathrm{D}_{x+t}}-\mathrm{P}\sum_{\nu=t}^{n-1}\frac{\mathrm{D}_{x+\nu}}{\mathrm{D}_{x+t}}\right)$$

$$=v^{-1}\left\{\sum_{\nu=t}^{n-1}(\nu+1-t)\frac{\mathrm{C}_{x+\nu}\cdot\mathrm{S}_{x+\nu}}{\mathrm{D}_{x+t}}+(n-t)\frac{\mathrm{D}_{x+n}\cdot\mathrm{S}_{x+n}}{\mathrm{D}_{x+t}}\right.$$

$$-v\frac{\partial\mathrm{P}}{\partial v}\cdot\sum_{\nu=t}^{n-1}\frac{\mathrm{D}_{x+\nu}}{\mathrm{D}_{x+t}}-\mathrm{P}\sum_{\nu=t}^{n-1}(\nu-t)\frac{\mathrm{D}_{x+\nu}}{\mathrm{D}_{x+t}}+\mathrm{P}\sum_{\nu=t}^{n-1}\frac{\mathrm{D}_{x+\nu}}{\mathrm{D}_{x+t}}$$

$$\left.-\mathrm{P}\sum_{\nu=t}^{n-1}\frac{\mathrm{D}_{x+\nu}}{\mathrm{D}_{x+t}}\right\}$$

$$=v^{-1}\left[\sum_{\nu=t}^{n-1}{}_\nu\mathrm{V}\frac{\mathrm{D}_{x+\nu}}{\mathrm{D}_{x+t}}+\mathrm{P}\sum_{\nu=t}^{n-1}\frac{\mathrm{D}_{x+\nu}}{\mathrm{D}_{x+t}}-\left\{\sum_{t=0}^{n-1}({}_t\mathrm{V}+\mathrm{P})\frac{\mathrm{D}_{x+t}}{\mathrm{D}_x}\right\}\frac{\sum_{\nu=t}^{n-1}\mathrm{D}_{x+\nu}/\mathrm{D}_{x+t}}{\sum_{t=0}^{n-1}\mathrm{D}_{x+t}/\mathrm{D}_x}\right]$$

$$=v^{-1}\left[\sum_{\nu=t}^{n-1}({}_\nu\mathrm{V}+\mathrm{P})\frac{\mathrm{D}_{x+\nu}}{\mathrm{D}_{x+t}}\left(1-\sum_{\nu=t}^{n-1}\mathrm{D}_{x+\nu}\Big/\sum_{\nu=0}^{n-1}\mathrm{D}_{x+\nu}\right)\right.$$

$$\left.-\sum_{\nu=0}^{t-1}({}_\nu\mathrm{V}+\mathrm{P})\frac{\mathrm{D}_{x+\nu}}{\mathrm{D}_{x+t}}\left(\sum_{\nu=t}^{n-1}\mathrm{D}_{x+\nu}\Big/\sum_{\nu=0}^{n-1}\mathrm{D}_{x+\nu}\right)\right]$$

(ここで，$1-\sum_{\nu=t}^{n-1}\mathrm{D}_{x+\nu}\Big/\sum_{\nu=0}^{n-1}\mathrm{D}_{x+\nu}\geqq 0,\quad 0\leqq{}_0\mathrm{V}\leqq{}_1\mathrm{V}\leqq\cdots\leqq{}_n\mathrm{V}$
であるから)

$$\geqq v^{-1}\left[\left({}_t\mathrm{V}+\mathrm{P}\right)\frac{\sum_{\nu=t}^{n-1}\mathrm{D}_{x+\nu}}{\mathrm{D}_{x+t}}\left(1-\frac{\sum_{\nu=t}^{n-1}\mathrm{D}_{x+\nu}}{\sum_{\nu=0}^{n-1}\mathrm{D}_{x+\nu}}\right)\right.$$

$$-\left({}_tV+P\right)\frac{\sum_{\nu=0}^{t-1} D_{x+\nu}}{D_{x+t}}\left(\frac{\sum_{\nu=t}^{n-1} D_{x+\nu}}{\sum_{\nu=0}^{n-1} D_{x+\nu}}\right)\Big]$$

$$=v^{-1}\left({}_tV+P\right)\frac{1}{D_{x+t}}\left\{\sum_{\nu=t}^{n-1} D_{x+\nu}-\sum_{\nu=0}^{n-1} D_{x+\nu}\left(\frac{\sum_{\nu=t}^{n-1} D_{x+\nu}}{\sum_{\nu=0}^{n-1} D_{x+\nu}}\right)\right\}$$

$$=0$$

よって $\dfrac{\partial}{\partial v}\ {}_tV \geqq 0$

換言すれば，利率が上昇すれば ${}_tV$ は減少する。

午後の部

4. 収入の現価 $= P\cdot \ddot{a}_{x:\overline{n|}}$

支出の現価 $= \bar{A}_{x:\overline{n|}} + k_1\cdot P'(I\bar{A})^{1}_{x:\overline{n|}} + k_2\, nP'\,{}_nE_x$

$P'=\dfrac{P+a}{1-b}$ であることに注意して，収入現価＝支出現価 から

$$P=\frac{(1-b)\bar{A}_{x:\overline{n|}}+a\left\{k_1(I\bar{A})^{1}_{x:\overline{n|}}+k_2 n\,{}_nE_x\right\}}{(1-b)\ddot{a}_{x:\overline{n|}}-\left\{k_1(I\bar{A})^{1}_{x:\overline{n|}}+k_2 n\,{}_nE_x\right\}}$$

$$\therefore P'=\frac{\bar{A}_{x:\overline{n|}}+a\cdot\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}{(1-b)\ddot{a}_{x:\overline{n|}}-\left\{k_1(I\bar{A})^{1}_{x:\overline{n|}}+k_2 n\,{}_nE_x\right\}}$$

5. 題意の給付現価を $\bar{A}^{a\,1}_{x:\overline{n|}}$ とすると，

$$\bar{A}^{a\,1}_{x:\overline{n|}}=\int_0^n v^t\,{}_tp_x\left\{\mu^{(i)}_{x+t}(1+k)+\mu^{(-i)}_{x+t}\right\}dt$$

$$= \int_0^n v^t \, {}_tp_x \, (\mu_{x+t} + k \, \mu_{x+t}^{(i)}) \, dt$$

$$= \bar{A}^{\,1}_{x:\overline{n|}} + k \int_0^n v^t \cdot {}_tp_x \, \mu_{x+t}^{(i)} \, dt$$

ところで，　$\mu_{x+t}^{(i)} = C \, \mu_{x+t}^{(-i)}$　であるから

$$\mu_{x+t}^{(i)} = \frac{C}{1+C} \mu_{x+t}$$

$$\therefore \quad \bar{A}^{a\,1}_{x:\overline{n|}} = \bar{A}^{\,1}_{x:\overline{n|}} + \frac{kC}{1+C} \bar{A}^{\,1}_{x:\overline{n|}}$$

$$\therefore \quad \bar{P}^{a\,1}_{x:\overline{n|}} = \left(1 + \frac{kC}{1+C} \right) \bar{P}^{\,1}_{x:\overline{n|}}$$

6. (1) 新契約費の限度

$\tilde{P}_1$ を初年度純保険料，$\tilde{P}_2$ を次年度以降純保険料とする。

$\tilde{P}_1$ はその年度の自然保険料であるから

$$\tilde{P}_1 = \frac{C_x}{D_x} = \tilde{P}_2 - \tilde{\alpha} = P_x + \frac{\tilde{\alpha}}{\ddot{a}_x} - \tilde{\alpha} = P_x - \tilde{\alpha} \frac{N_{x+1}}{N_x}$$

$$\therefore \quad \tilde{\alpha} = \left(P_x - \frac{C_x}{D_x} \right) \frac{N_x}{N_{x+1}}$$

$$= \frac{M_x}{N_{x+1}} - \frac{C_x}{D_x} \cdot \frac{N_x}{N_{x+1}}$$

$$= \frac{M_{x+1}}{N_{x+1}} + \frac{C_x}{N_{x+1}} - \frac{C_x}{D_x} \frac{N_x}{N_{x+1}}$$

$$= P_{x+1} - \frac{C_x}{D_x}$$

責任準備金の算式

$${}_tV_x = A_{x+t} - \tilde{P}_2 \, \ddot{a}_{x+t}$$

$$= A_{x+t} - (\widetilde{P}_1 + \widetilde{\alpha})\ddot{a}_{x+t}$$

$$= A_{x+t} - P_{x+1}\ddot{a}_{x+t}$$

(2) 第１保険年度

死差損益； $S_0 \dfrac{C_x}{D_x}(1+i) - (S_0 - S_1) = S_0 q_x - (S_0 - S_1)$

利差損益； $I'_1 - S_0 q_x \cdot v \cdot i$

費差損益； $S_0(\widetilde{\alpha} + \dfrac{\alpha - \widetilde{\alpha}}{\ddot{a}_x} + \beta + P'_x \cdot \gamma) - E'_1$

第２保険年度

死差損益； $S_1 P_{x+1}(1+i) - (S_1 - S_2) - S_2(A_{x+2} - P_{x+1}\ddot{a}_{x+2})$

利差損益； $I'_2 - S_1 P_{x+1} \cdot i$

費差損益； $S_1(\dfrac{\alpha - \overline{\alpha}}{\ddot{a}_x} + \beta + P'_x \gamma) - E'_2$

7. 昭和４０年度問９参照のこと。