〔問〕

昭和44年度　（問題）

午前の部

1.　一辺1の正方形ABCDにおいて〔A，B）上に任意に2点をとる。（すなわち2点は互いに独立な一様分布に従うものとする。）

いま，動点P，Qがこれらの2点のうちAに近い方をPの始点，他をQの始点として，この周上を

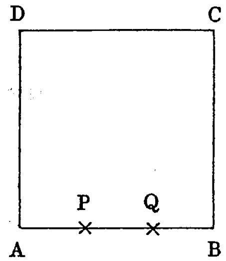
P　：　毎秒4

Q　：　毎秒3

の速さでA→B→C方向にまわるとき，PとQがはじめて重なる点が

〔A，B），　〔B，C），　〔C，D），　〔D，A）

上にある確率をそれぞれについて求めよ。



(注)　〔A，B）は点Aを含み，点Bを含まない線分ABを意味する。

2.　ある年度末において，ある国の人口が9,000万，その首都の人口が900万で，毎年首都からその前年度末人口の2％が転出し，首都以外の地方からその前年度末人口の0.5％が首都に転入して来るものとする。

いま，その国の人口が常に一定であるとすれば，

(1)　時の経過とともに首都の人口はどのようになって行くか。

(2)　究極的に首都の人口は全人口の何割になっているか。

3.　ある試行において事象Eの起る確率がpであるとき，

(1)　Eがちょうどk回起るまでその試行を独立に繰りかえすものとして，その時までの試行回数を$k+X$とする。$X=0$,　1,……である確率を求めよ。

(2)　上のXの分布の特性関数を求めよ。

(3)　平均値を求めよ。

(4) 積率母関数 $\mathcal{G}(\theta)$ についてその自然対数のべき級数展開を

$$\log\ (\mathcal{G}(\theta)) = \sum_{r=0}^{\infty} B_r \frac{\theta^r}{r!}$$

とする時，B_1，B_2 を求めよ。

午後の部

4. 独立な確率変数X，Yがいずれも正規分布N(0，1)に従う時，Z＝X＋Yの分布関数を求めよ。

5. ある年度に契約を締結した保険群団 N_0 人から出発して，第 t 年度末に N_t 人が脱退し，次の年度始にただちに同じ人数の新規加入があるものとする。第 $t+1$ 年度の加入者 N_t 人($t=0, 1, 2, \cdots\cdots$)のうち加入から i 年度後に脱退する人数は $a_i N_t$ 人で $a_1+a_2+\cdots\cdots+a_k=1$ とする。

(1) 新規加入者数 N_t は，その直前 k 年間の新規加入者数の一次結合で示されることを証明せよ。ただし，$k \leqq t$

(2) 新規加入者の数はある有限値に収束し，この群団は定常状態に近ずくことを証明せよ。

(3) 上記(2)の極限値を求めよ。

昭和 44 年度　（解答）

午前の部

1.　$AP = p$，$AQ = q$ とすると，はじめて重なるまでの時間 t は，

$$4t + p = 3t + q$$

$$\therefore\ t = q - p$$

このとき，$4t + p = 4q - 3p$

従って

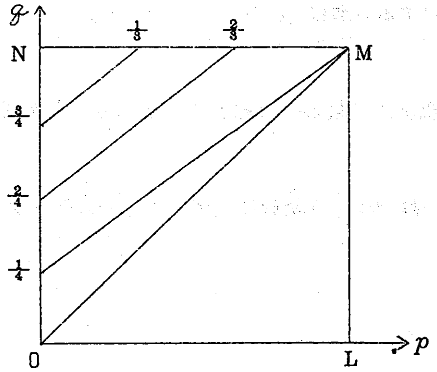
〔A，B）上で重なるのは　$0 \leqq 4q - 3p < 1$

〔B，C）上で重なるのは　$1 \leqq 4q - 3p < 2$

〔C，D）上で重なるのは　$2 \leqq 4q - 3p < 3$

〔D，A）上で重なるのは　$3 \leqq 4q - 3p < 4$

のときとなる。（p がAに着くまでに必らず重なる。）



さて，（p，q）は左図において△OMN内および（0，N）上で一様，〔0，M）上でその半分の確率をもって分布する。

従って，求める確率は上記不等式で示された四つの部分の面積比となり，（〔0，M）上の差は面積比に関係なし。）

〔A，B）上で重なる確率 $\dfrac{1}{4}$

〔B，C）上で重なる確率 $\dfrac{5}{12}$

〔C，D）上で重なる確率 $\dfrac{1}{4}$

〔D，A）上で重なる確率 $\dfrac{1}{12}$

2.　t 年経過後の首都の人口を $u(t)$ とすれば，その時の首都以外の人口は $9 \times 10^7 - u(t)$ である。題意により

$$u(t+1)=(1-0.02)u(t)+0.005(9\times10^7-u(t))$$

$$=0.975u(t)+45\times10^4$$

$$u(1)=0.975u(0)+45\times10^4$$

$$u(2)=0.975\{0.975u(0)+45\times10^4\}+45\times10^4$$

$$=0.975^2u(0)+45\times10^4(1+0.975)$$

……………………………以下順次同様にして

$$u(t)=0.975^t u(0)+45\times10^4(1+0.975+0.975^2+\cdots+0.975^{t-1})$$

$$=0.975^t u(0)+\frac{1-0.975^t}{1-0.975}\times 45\times10^4$$

$$=0.975^t\left\{u(0)-\frac{45\times10^4}{1-0.975}\right\}+\frac{45\times10^4}{1-0.975}$$

$$u(0)=9\times10^6,\quad \frac{45\times10^4}{1-0.975}=18\times10^6 \quad \text{から}$$

$$u(t)=18\times10^6-0.975^t\times9\times10^6$$

$$\frac{\lim_{t\to\infty}u(t)}{9\times10^7}=\frac{18\times10^6}{9\times10^7}=0.2$$

t 年経過後の首都の人口は上記$u(t)$式で表わされ，十分長い時間後には全国の20％に達する。

3. (1) 独立な試行を $x+k-1$ 回繰り返すまでに事象Eが $k-1$ 回起る確率は，

$$\binom{x+k-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^x$$

だから，求める確率は

$$P(X=x)=\binom{x+k-1}{k-1}p^k(1-p)^x \qquad (x=0,1,2,\cdots)$$

である。

(2) $$\binom{x+k-1}{k-1}=(-1)^x\binom{-k}{x}$$

であるから，求める特性函数を $\phi(t)$ とすると

$$\phi(t)=E(e^{itX})=\sum_{x=0}^{\infty}\binom{x+k-1}{k-1}p^k(1-p)^x e^{itx}$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} \binom{-k}{x} p^{k} (-q e^{it})^{x} \qquad (q = 1-p)$$

$$= p^{k} (1 - q e^{it})^{-k}$$

(3) 先ず，積率母函数は，$\phi(t)$において $it = \theta$ とおけばよいから，

$$g(\theta) = p^{k} (1 - q e^{\theta})^{-k}$$

である。そこで，Xの平均値は

$$E(X) = \left[\frac{\partial}{\partial \theta} g(\theta) \right]_{\theta=0} = \left[-k p^{k} (1 - q e^{\theta})^{-k-1} (-q e^{\theta}) \right]_{\theta=0}$$

$$= k p^{k} q (1-q)^{-k-1} = k \cdot \frac{q}{p}$$

(4) $\log (g(\theta)) = k \log p - k \log (1 - q e^{\theta}) = -k \log \left(1 - \frac{q}{p} (e^{\theta} - 1) \right)$

$$= -k \left\{ -\frac{q}{p} (e^{\theta} - 1) - \frac{1}{2} \frac{q^2}{p^2} (e^{\theta} - 1)^2 - \cdots \right\}$$

$$= -k \left\{ -\frac{q}{p} \left(\theta + \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^3}{3!} + \cdots \right) - \frac{1}{2} \frac{q^2}{p^2} \left(\theta + \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^3}{3!} + \cdots \right)^2 - \cdots \right\}$$

$$= k \frac{q}{p} \theta + \left(k \cdot \frac{q}{2p} + k \cdot \frac{q^2}{2p^2} \right) \theta^2 + (\theta \text{の3次以上の項})$$

ゆえに　$B_1 = k \frac{q}{p}$

$$B_2 = k \cdot \frac{q}{p} + k \cdot \frac{q^2}{p^2} = k \cdot \frac{q}{p^2} (p + q) = k \cdot \frac{q}{p^2}$$

午後の部

4. X，Yの密度函数はそれぞれ $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$，$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$ であるから，

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{x+y \leqq z} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \, dx \, dy$$

$x+y=u,\quad x-y=v$ とおくと, $\quad x=\dfrac{u+v}{2},\quad y=\dfrac{u-v}{2}$

$$\therefore \begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{u^2+v^2}{2} \\[2ex] \dfrac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)}=\begin{vmatrix} \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\therefore\ F(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{z}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2+v^2}{4}}\cdot\frac{1}{2}\cdot du\,dv=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{u^2}{4}}du\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{4}}dv$$

ここで $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,(\sqrt{2})}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2(\sqrt{2})^2}}dv=1$ であるから,

$$F(z)=\frac{2\sqrt{\pi}}{4\pi}\int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{u^2}{4}}du=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{u^2}{4}}du$$

5. (1) 題意により $N_1=a_1N_0$

$N_2=a_2N_0+a_1N_1$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$N_k=a_kN_0+a_{k-1}N_1+\cdots\cdots+a_1N_{k-1}$

$N_{k+1}=a_{k+1}N_0+\cdots\cdots+a_2N_{k-1}+a_1N_k$

一般に $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$

$N_t=a_tN_{t-k}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+a_1N_{t-1}$

即ち，或る年度の新規加入者は，その前k年間の脱退者の加重平均である。

(2) $\mathrm{Max}(N_k,\ N_{k+1},\ \cdots\cdots,N_{k+t-1})=\overline{N}_{k+t}$

$\mathrm{Min}(N_k,\ N_{k+1},\ \cdots\cdots,N_{k+t-1})=\underline{N}_{k+t}$ とおくと,

$$\overline{N}_{h+t+1}=\mathrm{Max}\,(N_{h+1},N_{h+2},\cdots,N_{h+t})\leqq \mathrm{Max}\,(N_h,\ N_{h+1},\cdots,N_{h+t-1})=\overline{N}_{h+t}$$

$$\left\{\begin{aligned} \because\ N_{h+t}\ &\leqq (a_h+a_{h-1}+\cdots+a_1)\mathrm{Max}\,(N_h,N_{h+t},\cdots\\ &\qquad\cdots,N_{h+t-1})\\ &\leqq \overline{N}_{h+t}\end{aligned}\right.$$

即ち，$\overline{N}_{h+t}\geqq\overline{N}_{h+t+1}\geqq\overline{N}_{h+t+2}>\cdots$ で $\{\overline{N}_t\}$ は単調減少
全く同様に　$\underline{N}_{h+t}\leqq\underline{N}_{h+t+1}\leqq\cdots\cdots$ で $\{\underline{N}_t\}$ は単調増加
で共に有界

であるので，夫々極限値A，Bを有する。

今 A ≒ B とすれば矛盾することを云う。

A ≒ B とすれば　$A>B+\delta$ なる正の数 δ が存在し，十分大きな δ に対して

$$\overline{N}_t>\underline{N}_t+\delta$$

$$N_t-\underline{N}_t=a_h(N_{t-h}-\underline{N}_t)+a_{h-1}(N_{t-h-1}-\underline{N}_t)+\cdots+a_1(N_{t-1}-\underline{N}_t)$$

$N_i=\underline{N}_t$　とおくと　$a_i(N_i-\underline{N}_t)=0$　より

$$N_t-\underline{N}_t\leqq(a_h+a_{h-1}+\cdots+a_{i+1}+a_{i-1}+\cdots+a_1)(\overline{N}_t-\underline{N}_t)$$

$$\leqq(1-a_i)\ (\overline{N}_t-\underline{N}_t)$$

$$N_t\leqq\overline{N}_t-a_i(\overline{N}_t-\underline{N}_t)\leqq\overline{N}_t-a_i\delta$$

$$\overline{N}_{t+h}=\mathrm{Max}\,(N_{t+h-1},\ \cdots\cdots,N_t)$$

$$\leqq\mathrm{Max}\,(\overline{N}_{t+h-1}-a_i\delta,\ \cdots\cdots,\ \overline{N}_t-a_i\delta)$$

$$\leqq\mathrm{Max}\,(\overline{N}_{t+h-1}\cdots\cdots\overline{N}_t)-a_i\delta=\overline{N}_t-a_i\delta$$

以下同様にして，$\overline{N}_{t+nh}\leqq\overline{N}_t-n\,a_i\,\delta$ となり，之は N_t が有界であることに矛盾す

する。　従って，A ＝ B

(3)　極限値を求める。

$t+1$ 年度始の人数を契約年度別に列挙すると，夫々新契約から以後の脱退数を差引いて，

初年度　N_t $= (a_1 + a_2 + \cdots\cdots a_k) N_t$

次年度　$N_{t-1} - a_1 N_{t-1}$ $= (a_2 + \cdots\cdots a_k) N_{t-1}$

………………………………………………………………………………

k年度　$N_{t-k+1} - a_1 N_{t-k+1} - \cdots\cdots - a_{k-1} N_{t-k+1} =$ $a_k \cdot N_{t-k+1}$

総数は最初から N_0 人で変りないから

$$N_0 = (a_1 + a_2 + \cdots\cdot a_k) N_t + (a_2 + \cdots\cdot a_k) N_{t-1} + \cdots\cdot + a_k N_{t-k+1}$$

$\lim_{t \to \infty} N_t = N$　とおくと

$$N_0 = (a_1 + 2a_2 + \cdots\cdots k a_k) N$$

$$\therefore \quad N = \frac{N_0}{a_1 + 2a_2 + \cdots\cdot + k a_k}$$