昭和 43 年度　（問題）

午前の部

1. 電球の寿命は指数分布に従うとし，その期待値 α^{-1} は未知であるとする。 α^{-1} を推定するためにn個の電球を抽出し，寿命の短い順にr番目までの値

$$X_{(1)} < X_{(2)} < \cdots\cdots < X_{(r)}$$

を観測する。

$X_{(1)},\ X_{(2)},\ \cdots\cdots,\ X_{(r)}$ の一次結合

$$U = \lambda_1 X_{(1)} + \lambda_2 X_{(2)} + \cdots\cdot + \lambda_r X_{(r)}$$

を α^{-1} の推定量としたとき，

$$U = \{ X_{(1)} + X_{(2)} + \cdots\cdots X_{(r)} \} \cdot \frac{1}{r} + X_{(r)} \cdot \frac{n-r}{r}$$

が，最良の不偏推定量で， $\mathrm{Var}(U) = \frac{1}{r} \cdot \alpha^{-2}$ であることを示せ。

Hint :

確率変数 $X_{(1)},\ X_{(2)} - X_{(1)},\ \cdots,\ X_{(r)} - X_{(r-1)}$ は，互いに独立で $X_{(k+1)} - X_{(k)}$ の密度関数は，$(n-k)\alpha e^{-(n-k)\alpha t}$ で与えられることを利用せよ。

2. 平均値λが未知なポアソン分布からの大きさnの標本の値を $x_1,\ \cdots\cdots,\ x_n$ とするとき，

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

はλの充足推定量である。証明せよ。

〔問〕

午後の部

3.　k水準の一因子実験の際の，平均値が等しいことの帰無仮設の検定において統計量

$$\frac{N-k}{k-1}\qquad\frac{\sum_i n_i(\overline{X}_i-\overline{X}\ )^2}{\sum_i\sum_r\ (X_{ir}-\overline{X}_i\ )^2}$$

を用いる理由を説明せよ。

ただし，

N　：　総実験数

k　：　水準の数

X_{ir}　：　第 i 組第 r 番目の実験の確率変数

$\overline{X}_i\ =\ \frac{1}{n_i}\ \sum_r\ X_{ir}$　　（ n_i は第 i 組の実験数）

$\overline{X}\ =\ \frac{1}{N}\sum_{i,r}\ X_{ir}$

4.　次の２問中，１問を選んで解け。

(i)　x，y が次の条件を満足する範囲で，関数　$2x+3y$　の最大値を求めよ。

$x\ -\ 3y\ \leqq\ 6$　　(1)

$2x\ +\ 4y\ \geqq\ 8$　　(2)

$x\ -\ 3y\ \geqq\ -6$　　(3)

$x\ \geqq\ 0$　　(4)

$y\ \geqq\ 0$　　(5)

(ii)　一直線上のランダムウォークにおいて，Z（自然数）から出発した質点が夫々０および a（自然数）に達する確率を夫々 q_z および $1-q_z$ とする。１回の試行で左または右に１移動する確率を夫々 q または p（$p+q=1$，$p\neq q$）とするとき，

$$q_0\ =\ 1\ ,\qquad q_a\ =\ 0$$

の条件のもとに，q_z を解け。

昭和 43 年度　（解答）

午前の部

1.　$X_{(1)} = Y_1$，$X_{(2)} - X_{(1)} = Y_2$，…，$X_{(r)} - X_{(r-1)} = Y_r$ とおくと，Hint により，Y_1，Y_2，…，Y_r は互いに独立で，Y_k の密度関数は，

$(n-k+1)\alpha e^{-(n-k+1)\alpha x}$　で与えられる。

$X_{(k)} = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_k$　であるから

$$
\begin{aligned}
U &= \lambda_1 X_{(1)} + \cdots + \lambda_r X_{(r)} \\
&= \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 (Y_1 + Y_2) + \cdots + \lambda_r (Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_r) \\
&= (\lambda_1 + \cdots + \lambda_r) Y_1 + (\lambda_2 + \cdots + \lambda_r) Y_2 + \cdots + \lambda_r Y_r
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(U) &= (\lambda_1 + \cdots\cdots + \lambda_r)\ E(Y_1) \\
&\quad + (\lambda_2 + \cdots\cdots + \lambda_r)\ E(Y_2) + \cdots + \lambda_r E(Y_r) \\
&= (\lambda_1 + \cdots\cdots + \lambda_r) \frac{1}{n\alpha} + (\lambda_2 + \cdots + \lambda_r) \frac{1}{(n-1)\alpha} + \cdots\cdots \\
&\quad + \lambda_r \frac{1}{(n-r+1)\alpha}
\end{aligned}
$$

Uが不偏推定量であるためには

$$
(\lambda_1 + \cdots + \lambda_r) \frac{1}{n\alpha} + (\lambda_2 + \cdots + \lambda_r) \frac{1}{(n-1)\alpha} + \cdots + \lambda_r \frac{1}{(n-r+1)\alpha} = \frac{1}{\alpha}
$$

したがって，

$$\frac{\lambda_1+\cdots+\lambda_r}{n}+\frac{\lambda_2+\cdots+\lambda_r}{n-1}+\cdots+\frac{\lambda_r}{n-r+1}=1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

一方

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(U) &= (\lambda_1+\cdots+\lambda_r)^2\ \mathrm{Var}(Y_1) \\
&\quad + (\lambda_2+\cdots+\lambda_r)^2\ \mathrm{Var}(Y_2)+\cdots+\lambda_r^2\ \mathrm{Var}(Y_r) \\
&= (\lambda_1+\cdots+\lambda_r)^2\ \frac{1}{n^2\alpha^2} \\
&\quad + (\lambda_2+\cdots+\lambda_r)^2\ \frac{1}{(n-1)^2\alpha^2}+\cdots+\frac{1}{(n-r+1)^2\alpha^2} \\
&= \frac{1}{\alpha^2}\left\{\left(\frac{\lambda_1+\cdots+\lambda_r}{n}\right)^2+\left(\frac{\lambda_2+\cdots+\lambda_r}{n-1}\right)^2+\cdots \right. \\
&\qquad \left. +\left(\frac{\lambda_r}{n-r+1}\right)^2\right\}
\end{aligned}$$

Uが最良の不偏推定量であるためには，(1)の条件の下で

$$\left(\frac{\lambda_1+\cdots+\lambda_r}{n}\right)^2+\left(\frac{\lambda_2+\cdots+\lambda_r}{n-1}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\lambda_r}{n-r+1}\right)^2 \quad \cdots\cdots\cdots (2)$$

が，最小になるように λ_1，λ_2，$\cdots$，λ_r を定めればよい。

一般に Schwarz の不等式により

$$(a_1+\cdots+a_r)^2 \leqq r\,(a_1^2+\cdots+a_r^2)$$

がいえるから，$a_1+\cdots+a_r=1$ なるときは

$$a_1^2+\cdots+a_r^2 \geqq \frac{1}{r}$$

等号は，$a_1=a_2=\cdots=a_r=\dfrac{1}{r}$ なるときに限る。なんとなれば Lagrange の

乗数法により $a_1+\cdots+a_r=1$ なる条件の下で，$a_1^2+\cdots+a_r^2$ が極値をとる条件を求めてみると

$$F=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_r^2+\lambda(a_1+\cdots+a_r-1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial a_i}=2a_i+\lambda=0$$ とおくと

$$a_i=-\frac{\lambda}{2}$$ すなわち $a_1=a_2=\cdots=a_r$ でなければならない。

よって(1)なる条件の下で(2)が最小となるためには

$$\frac{\lambda_1+\cdots+\lambda_r}{n}=\frac{\lambda_2+\cdots+\lambda_r}{n-1}=\cdots=\frac{\lambda_r}{n-r+1}=\frac{1}{r}$$

$$\lambda_1+\cdots+\lambda_r=\frac{n}{r}$$

$$\lambda_2+\cdots+\lambda_r=\frac{n-1}{r}$$

$$\vdots$$

$$\lambda_r=\frac{n-r+1}{r}$$

これら r 個の式から容易に

$$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{r-1}=\frac{1}{r},\quad \lambda_r=\frac{n-r+1}{r}$$

であることがいえる。 故に

$$U=(X_{(1)}+\cdots+X_{(r)})\frac{1}{r}+X_{(r)}\frac{n-r}{r}$$ となる。

(2)が最小値 $\frac{1}{r}$ をとるように λ_i を定めたから，

$$\mathrm{Var}(U)=\frac{1}{r}\alpha^{-2}$$ なることは明らかである。

2. Poisson 分布の密度関数は $f(X, \lambda) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^X}{X!}$

で同時密度関数は

$$f(X_1, \lambda) \cdots\cdots f(X_n, \lambda) = e^{-n\lambda} \frac{\lambda^{X_1+\cdots+X_n}}{X_1! \cdots\cdots X_n!}$$ である。

一方，$n\overline{X}$ の密度関数は $e^{-n\lambda} \dfrac{(n\lambda)^{n\overline{X}}}{(n\overline{X})!}$ である。

ここで，$f(X_1, \lambda) \cdots\cdots f(X_n, \lambda)$

$$= e^{-n\lambda} \frac{(n\lambda)^{n\overline{X}}}{(n\overline{X})!} \cdot \frac{(n\overline{X})!}{n^{n\overline{X}} X_1! \cdots\cdots X_n!}$$

となる。こゝで $\dfrac{(n\overline{X})!}{n^{n\overline{X}} X_1! \cdots\cdots X_n!}$ は λ を含まない。

午後の部

3. $\sum_r (X_{ir})^2 = \sum_r (X_{ir} - \overline{X}_i)^2 + n_i \overline{X}_i^2$

この両辺を i につき和をとれば

$$\sum_i \sum_r X_{ir}^2 = \sum_i \sum_r (X_{ir} - \overline{X}_i)^2 + \sum_i n_i \overline{X}_i^2$$

また

$$\sum_i n_i \overline{X}_i^2 = \sum_i n_i (\overline{X}_i - \overline{X})^2 + N\overline{X}^2$$

であるから上に代入して

$$\sum_i \sum_r X_{ir}^2 = \sum_i \sum_r (X_{ir} - \overline{X}_i)^2 + \sum_i n_i (\overline{X}_i - \overline{X})^2 + N\overline{X}^2$$

が得られる。こゝで $E(\overline{X}_i) = \xi_i$, $\sum_i n_i \xi_i / N = m$ であるから

$(X_{ij} - \overline{X}_i) = (X_{ij} - \xi_i) - (\overline{X}_i - \xi_i)$ を使い

$$\sum_i\sum_r(X_{ir}-\overline{X}_i)^2=\sum_i\sum_r(X_{ir}-\xi_i)^2-\sum_i n_i(\overline{X}_i-\xi_i)^2 \cdots\cdots\cdots (1)$$

また，　$E(X_{ir}-\xi_i)^2=\sigma^2$　で X_i の分散は　σ^2/n_i

となるから

$$E\left(\sum_i\sum_r(X_{ir}-\overline{X}_i)^2\right)$$

$$=E\left(\sum_i\sum_r(X_{ir}-\xi_i)^2\right)-E\left(\sum_i n_i(\overline{X}_i-\xi_i)^2\right)$$

$$=N\sigma^2-k\sigma^2=(N-k)\sigma^2$$ が得られる。

他方　$\sum_i n_i(\overline{X}_i-\overline{X})^2$

$$=\sum_i n_i\left((\overline{X}_i-m)-(\overline{X}-m)\right)^2$$

$$=\sum_i n_i(\overline{X}_i-m)^2-N(\overline{X}-m)^2$$

であり，

$$(\overline{X}_i-m)^2=(\overline{X}_i-\xi_i)^2+(\xi_i-m)^2+2(\overline{X}_i-\xi_i)(\xi_i-m)$$

であるので

$$E(\overline{X}_i-m)^2$$

$$=E(\overline{X}_i-\xi_i)^2+(\xi_i-m)^2+2(\xi_i-m)E(\overline{X}_i-\xi_i)$$

$$=\sigma^2/n_i+(\xi_i-m)^2$$ である。

したがって

$$E\left(\sum_i n_i(\overline{X}_i-\overline{X})^2\right)=k\sigma^2+\sum_i n_i(\xi_i-m)^2-\sigma^2$$

$$=(k-1)\sigma^2+\sum_i n_i(\xi_i-m)^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

となり，(1)より　$\sum_i\sum_r(X_{ir}-\overline{X}_i)^2$ は ξ_i に関する仮説の如何を問わず $(N-k)\sigma^2$ の

不偏推定量であるが，(2)より

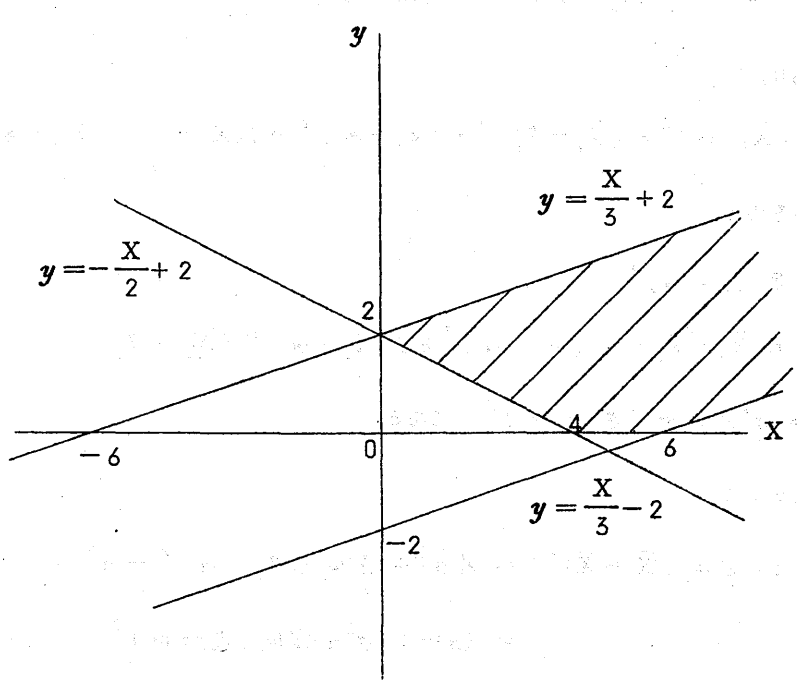
$\sum_i n_i(\overline{X}_i - \overline{X})^2$ は $\xi_1 = \xi_2 = \cdots = \xi_k$ なるときに限り $(k-1)\sigma^2$ の不偏推定量となる。すなわち，仮説

$\xi_1 = \xi_2 = \cdots = \xi_k = m$ が真でなければ，統計量

$$\frac{N-k}{k-1} \quad \frac{\sum_i n_i(\overline{X}_i - \overline{X})^2}{\sum_i \sum_r (X_{ir} - \overline{X}_i)^2}$$

は大きくなる。よってこの統計量を $\xi_1 = \cdots = \xi_k = m$ を検定するための統計量に選ぶ。

4. (i) 条件(1)，(2)，(3)，(4) をみたす (x, y) の範囲は，図の斜線部分で $2x+3y$ の値はこゝで無限大をとることができる。したがって最大値は無限大である。



4. (ii)　題意より，$q_z = p \cdot q_{z+1} + q \cdot q_{z-1}$ ，$(0 < z < a)$ ………… (1)

この差分方程式の特別解として

$$q_z = 1 \text{ ,} \quad q_z = \left(\frac{q}{p}\right)^z$$

が得られる。よって

$$q_z = A \cdot 1 + B\left(\frac{q}{p}\right)^z$$

が(1)の形式的な解とする。　条件(A)を満たすためには

$$A + B = 1 \text{ ,} \qquad A + B\,(q/p)^a = 0$$

故に，
$$B = \frac{p^a}{p^a - q^a} \text{ ,} \quad A = -\frac{q^a}{p^a - q^a}$$

$$\therefore \quad q_z = \frac{p^a\left(\frac{q}{p}\right)^z - q^a}{p^a - q^a} = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^z - \left(\frac{q}{p}\right)^a}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^a} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

逆に，(1)を満たす解が，q_z および q_z^* の二つあったとする。

条件(A)より

$$q_0 = 1 = q_0^* \text{ ,} \qquad q_a = 0 = q_a^*$$

でなければならない。

そこで，　$r_z = q_z - q_z^*$　とおくと，

$$r_0 = 0 \text{ ,} \qquad r_a = 0$$

次に (1) より順次 に，

$$p\,r_2 = r_1$$
$$p^2\,r_3 = r_1\,(1 - pq)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

一般に，　$\gamma_z = \gamma_1 C_z$　（C_z：定数）

故に，　$\gamma_a = \gamma_1 C_a = 0$　なることから，（C_z が 0 であると否とに拘らず）

$$\gamma_1 = 0 = \gamma_2 = \cdots\cdots = \gamma_{a-1}$$

$$\therefore \quad g_z = g_z^*$$

故に(2)が解である。