昭和 43 年度　（問題）

午前の部

1.　白球2個，黒球10個を2個の袋に分配し（空袋なし），そのいずれかの袋から1球を取り出して，それが白球であることの確率を最大または最小にするようにするには，どのような分配をすればよいか。

2.　或る楽器店では毎月始めに1回仕入れを行なっている。この店で，ピアノを購入する目的で来る客を月平均5人とし，これがポアツソン分布になるとしたとき，

(1)　品切れとなる確率を5％以下にする

(2)　品切れのためことわる客を平均して，来客の平均値の5％以下にする

ためには，この楽器店は月始めに何台のピアノを仕入れておけばよいか。それぞれの場合につき求めよ。（ $e^5 = 148.41$ ）

午後の部

3.　$X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n$ が互いに独立ですべて同じ正規分布N（0，1）にしたがう確率変数なるとき，

$$X = X_1^2 + X_2^2 + \cdots\cdots + X_n^2$$

の平均値および分散はそれぞれ n および $2n$ であることを証明せよ。

4.　$X_0, X_1, \cdots\cdots, X_n$ を同一の指数分布に従う互いに独立な確率変数とするとき，$X_0 + X_1 + \cdots\cdots + X_n$ の確率密度関数 $g_n(x)$ および分布関数 $G_n(x)$ は，次式で与えられることを証明せよ。

$$g_n(x) = \alpha \cdot \frac{(\alpha x)^n}{n!} \cdot e^{-\alpha x}, \qquad x > 0$$

$$G_n(x) = 1 - e^{-\alpha x}\left\{1 + \frac{\alpha x}{1!} + \cdots\cdots + \frac{(\alpha x)^n}{n!}\right\}, \qquad x > 0$$

〔問〕

(注)　X_k の確率密度関数 $f(x)$ および分布関数 $F(x)$ はそれぞれ次式で与えられる。

$$f(x) = \alpha \cdot e^{-\alpha x}, \quad F(x) = 1 - e^{-\alpha x}, \cdots\cdots \quad x \geqq 0$$

$$f(x) = 0, \quad F(x) = 0, \quad \cdots\cdots \quad x < 0$$

昭和 43 年度　（解答）

午前の部

1.　第1の袋の白球の個数をx，黒球の個数をyとすれば，第2の袋の白球の個数は（$2-x$），黒球の個数は（$10-y$）となる。

いづれかの袋をランダムに選んで1個を取り出したとき，それが白球である確率pは

$$p=\frac{1}{2}\times\frac{x}{x+y}+\frac{1}{2}\times\frac{2-x}{(2-x)+(10-y)}=\frac{6x-(x+y)(x-1)}{(x+y)(12-x-y)}$$

（第1，第2の袋とも0でないから，$x+y\neq0$，$12-x-y\neq0$）

$x=0$とすれば$1\leqq y\leqq10$，$p=\dfrac{1}{12-y}$となり，最大値は$y=10$のとき　$p=\dfrac{1}{2}$

最小値は$y=1$のとき　$p=\dfrac{1}{11}$

$x=1$とすれば$0\leqq y\leqq10$，$p=\dfrac{6}{(1+y)(11-y)}$となり，最大値は$y=\begin{cases}0 \text{ or}\\10\end{cases}$のとき$p=$

最小値は$y=5$のとき$p=$

$x=2$とすれば$0\leqq y\leqq9$，$p=\dfrac{1}{2+y}$となり，最大直は$y=0$のとき　$p=\dfrac{1}{2}$

最小値は$y=9$のとき　$p=\dfrac{1}{11}$

従って，白球であることの確率を最大とするには，$x=1$，$y=10$　または　$x=1$，$y=0$，最小にするには　$x=0$，$y=1$　または　$x=2$，$y=9$　とすればよい。

2.　(1)　n台仕入れたときの品切れとなる確率は

$$\sum_{r=n+1}^{\infty} e^{-5}\ \frac{5^r}{r!}$$

となる。

したがって，品切れを5％以下とするためには

$$\sum_{r=n+1}^{\infty} e^{-5} \frac{5^r}{r!} \leqq 0.05$$

を満足する最小の整数を求めればよい。これは

$$\sum_{r=0}^{n} \frac{5^r}{r!} > 0.95 \quad e^5 = 140.99$$

と同等である。計算は次のとおり。

n	$\frac{5^n}{n!}$	$\sum_{r=0}^{n} \frac{5^r}{r!}$
0	1	1
1	5	6
2	$\frac{5^2}{2\cdot 1} = 12.5$	18.5
3	$5^3/3! = 12.5 \times \frac{5}{3} = 20.83$	39.33
4	$5^4/4! = 20.83 \times \frac{5}{4} = 26.04$	65.37
5	$5^5/5! = 26.04 \times \frac{5}{5} = 26.04$	91.41
6	$5^6/6! = 26.04 \times \frac{5}{6} = 21.70$	113.11
7	$5^7/7! = 21.70 \times \frac{5}{7} = 15.50$	128.61
8	$5^8/8! = 15.50 \times \frac{5}{8} = 9.69$	138.30
9	$5^9/9! = 9.69 \times \frac{5}{9} = 5.38$	143.68

答　$n = 9$

(2) 客の数をr人，仕入れの台数をn（$r>n$）とすれば，品切れのためことわる客は（$r-n$）となる。したがって，その平均値は

$$\sum_{r=n+1}^{\infty}(r-n)\frac{e^{-5}\cdot 5^{r}}{r!}$$

となる。

また，1カ月間の客の数は平均5人であるから，ことわられる客の割合を5％以下に抑えるためには，次の算式を満足する最小の整数nを求めることになる。

$$\frac{1}{5}\sum_{r=n+1}^{\infty}(r-n)\frac{e^{-5}\cdot 5^{r}}{r!}\leqq 0.05$$

ie $$\sum_{r=n+1}^{\infty}(r-n)\frac{e^{-5}\cdot 5^{r}}{r!}\leqq 0.05\times 5=0.25 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

一方，$$\sum_{r=0}^{\infty}(r-n)\frac{e^{-5}\cdot 5^{r}}{r!}=\sum_{r=0}^{\infty}r\cdot\frac{e^{-5}\cdot 5^{r}}{r!}-n\sum_{r=0}^{\infty}\frac{e^{-5}\cdot 5^{r}}{r!}$$

$$=5-n$$

故に，$$\sum_{r=n+1}^{\infty}(r-n)\frac{e^{-5}\cdot 5^{r}}{r!}=(5-n)-\sum_{r=0}^{n}(r-n)\frac{e^{-5}\cdot 5^{r}}{r!}$$

(1)より $$\sum_{r=0}^{n}(r-n)\frac{e^{-5}\cdot 5^{r}}{r!}\geqq 4.75-n$$

$$\sum_{r=0}^{n}(r-n)\frac{5^{r}}{r!}\geqq (4.75-n)\,e^{5}$$

計算は前表を利用して

$$n=7:\quad \sum_{r=0}^{7}(r-7)\frac{5^{r}}{r!}=\sum_{r=0}^{7}\cdot r\cdot\frac{5^{r}}{r!}-7\cdot\sum_{r=0}^{7}\cdot\frac{5^{r}}{r!}$$

$$= 1 \times 0 + 5 \times 1 + 12.5 \times 2 + 20.83 \times 3 + 26.04 \times 4$$

$$+ 26.04 \times 5 + 21.70 \times 6 + 15.50 \times 7$$

$$- 7 \times 128.61$$

$$= 565.55 - 900.27$$

$$= - 334.72$$

$$(4.75 - 7) \times e^5 = -333.92$$

$n=8$:

$$\sum_{r=0}^{8} (r-8) \frac{5^r}{r!} = 565.55 + 9.69 \times 8 - 8 \times 138.30$$

$$= 643.07 - 1106.4$$

$$= -463.33$$

$$(4.75-8) \times e^5 = -482.33$$

答 $n = 8$

午後の部

3.

$$E(X_i^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = V(X_i) = 1 \qquad (E(X)=0)$$

X_i が互いに独立であるから

$$E(X) = E(X_1^2) + E(X_2^2) + \cdots + E(X_n^2) = n$$

また,

$$E(X_i^4) = \int_{-\infty}^{\infty} x^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \left[x^3 \left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \right) \right]_{-\infty}^{\infty}$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} 3x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 3$$

$$\therefore \quad V(X_i^2) = E(X_i^4) - \{E(X_i^2)\}^2 = 3 - 1^2 = 2$$

$$V(X) = V(X_1^2) + \cdots\cdots + V(X_n^2) = 2 \cdot n$$

〔別　解〕

自由度nのχ^2分布に従うから，密度函数は

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & x \geqq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

である。したがって，

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^{\infty} x^{\frac{n+2}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}}\, dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{n+2}(x)\, dx = \frac{1}{2^{\frac{n+2}{2}}\Gamma(\frac{n+2}{2})} \int_0^{\infty} x^{\frac{n+2}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}\, dx = 1$$ を用いて

$$E(X) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} 2^{\frac{n+2}{2}} \Gamma(\frac{n+2}{2})$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} \cdot 2^{\frac{n+2}{2}} \cdot \frac{n}{2} \cdot \Gamma(\frac{n}{2}) = 2^1 \times \frac{n}{2} = n$$

$$E(X^2) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^{\infty} x^{\frac{n+4}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}\, dx$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} \cdot 2^{\frac{n+4}{2}}\ \Gamma(\frac{n+4}{2}) = 4 \cdot \frac{n+2}{2} \cdot \frac{n}{2} = n\ (n+2)$$

$$\mathrm{V(X)} = n\,(n+2) - n^2 = 2n$$

4.　まず，$g_n(x)$ について，数学的帰納法により証明する。

$n = 0$ のとき命題の成立は明らかである。

$n = k$ のとき命題は成立しているものと仮定する。

$$g_{k+1}(t) = \int_0^t g_k(t-x) \cdot g(x)\ dx$$

仮定により，$g_k(t-x) = \alpha \cdot \frac{\{\alpha \cdot (t-x)\}^k}{k\,!} e^{-\alpha(t-x)}$ であるから

$$g_{k+1}(t) = \int_0^t \alpha \cdot \frac{\{\alpha \cdot (t-x)\}^k}{k\,!} \cdot e^{-\alpha(t-x)} \cdot \alpha\, e^{-\alpha x}\ dx$$

$$= \frac{\alpha^{k+2},\ e^{-\alpha t}}{k\,!} \int_0^t (t-x)^k\ dx$$

$$= \frac{\alpha^{k+2},\ e^{-\alpha t}}{k\,!} \left[-\frac{(t-x)^{k+1}}{k+1} \right]_0^t$$

$$= \alpha \cdot \frac{(\alpha t)^{k+1}}{(k+1)\,!} \cdot e^{-\alpha t}$$

これは $n = k+1$ のときも命題が成立していることを示している。

よって，すべての n について命題は成立する。

次に $G_n(x)$ については，$G_n'(x) = g_n(x)$ を証明すればよい。

$$G_n'(x) = \alpha e^{-\alpha x}\left(1 + \frac{\alpha x}{1!} + \cdots + \frac{(\alpha x)^n}{n!}\right) - \alpha e^{-\alpha x}\left(1 + \frac{\alpha x}{1!} + \cdots + \frac{(\alpha n)^{n-1}}{(n-1)!}\right)$$

$$= \alpha e^{-\alpha x}\frac{(\alpha x)^n}{n!} = g_n(x)$$