

昭和 42 年度 (問題)

午前 の 部

1. 次の値を計算せよ。

(ア) $P_{61} = 0.055$, ${}_0p_{60} = 0.021$ を知って P_{60}

(イ) $P_{40:\overline{20}|} = 0.0365$ $P_{30:\overline{30}|} = 0.0202$ を知って ${}_{10}V_{30:\overline{30}|}$

ただし, $i = 0.04$ とする。

2. 死亡数が年間を通じて均等である場合には, $\mu_{x+\frac{1}{2}}$ と m_x は相等しいことを示せ。

3. 債務額 K , 債務に対する利率は年 i , 債務の期間 n の債務に対して, 減債基金により債務を返還することとした。(こゝに減債基金とは, 元金は元のまま負債として残しておいて, 割賦金の中からこの元金の利息を支払い, その残額を別勘定として積立利殖して予定年限の後に元金に到達させて一時に完済する方法をとる場合の積立金をいう。)

毎年期末に 1 回定額の支出 (〔債務に対する利息〕+〔減債基金への積立額〕) を行うとき次の各場合における支出額を求めよ。

(ア) 減債基金の積立の年利率が i のとき

(イ) 減債基金の積立の年利率が i' のとき

(ウ) 減債基金の積立の年利率が t 年まで i'_1 , 以後は i'_2 のとき

午後 の 部

4. $P = v \cdot g_{x+t} (1 - {}_{t+1}V) + (v \cdot {}_{t+1}V - {}_tV)$ について次の各号に答えよ。

(ア) この式を導け。

(イ) 右辺の才 1 項, 才 2 項はそれぞれ何と呼ばれるか。

(ウ) 言葉で意味を述べよ。

[問]

5. x 才の夫と y 才の妻が次に示す給付条件の連生年金保険に入る場合の年払純保険料を求めよ。ただし、保険料払込期間は n 年とし、保険料の払込は両者共存に限る。

(ア) 保険料払込期間中の妻死亡(夫生存)の場合は、既払込純保険料相当額の死亡払戻金を保険年度末に支払う。

(イ) 保険料払込期間中の夫死亡の場合は妻の生存を条件として毎年の契約応当日に年金1を支払う。

(ウ) 保険料払込期間満了の場合は、両者いずれか生存を条件として毎年契約応当日に年金1を支払う。

6. 保険金1の養老保険(保険料は年1回期首払とする)において Thiele の微分方程式;

$$\frac{d}{d\tau} {}_{t+\tau}V - (\mu_{t+\tau} + \delta) {}_{t+\tau}V + \mu_{t+\tau} = 0 \quad (0 < \tau < 1, t : \text{整数})$$

を解くことによって端数期間に対する ${}_{t+\nu}V$ を求め、これを使って一般的には

$${}_{t+\nu}V \geq v^{1-\nu} {}_{t+1}V \quad (0 < \nu \leq 1)$$

が成立することを証明せよ。

昭和 42 年度 (解答)

午前 の 部

1.

$$(7) P_x \ddot{a}_x = v g_x + v \cdot p_x \cdot A_{x+1} = v g_x + v p_x \cdot P_{x+1} \cdot \ddot{a}_{x+1}$$

$$\dot{\ddot{a}}_x = 1 + v \cdot p_x \cdot \dot{\ddot{a}}_{x+1}$$

$$\frac{1}{\dot{\ddot{a}}_x} = P_x + d$$

$$P_x = (P_x + d) \cdot v \cdot g_x + P_{x+1} \left(1 - \frac{1}{\dot{\ddot{a}}_x}\right)$$

$$= (P_x + d) v \cdot g_x + P_{x+1} (1 - P_x - d)$$

$$P_x (1 - v \cdot g_x + P_{x+1}) = P_{x+1} + d (v \cdot g_x - P_{x+1})$$

$$P_x = \frac{P_{x+1} - d (P_{x+1} - v \cdot g_x)}{1 - v g_x + P_{x+1}}$$

$$x = 60, \quad P_{61} = .055 \quad v \cdot g_{60} = .021 \quad d = \frac{.04}{1.04} = .038 \text{ を代入}$$

$$P_{60} = .052$$

$$(1) {}_t V_{x:\overline{n}|} = A_{x+t:\overline{n-t}|} - P_{x:\overline{n}|} \cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$$

$$= (P_{x+t:\overline{n-t}|} - P_{x:\overline{n}|}) \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$$

$$= \frac{P_{x+t:\overline{n-t}|} - P_{x:\overline{n}|}}{P_{x+t:\overline{n-t}|} + d}$$

故に

$${}_{10}V_{30:\overline{30}|} = \frac{P_{40:\overline{20}|} - P_{30:\overline{30}|}}{P_{40:\overline{20}|} + \frac{.04}{1.04}} = \frac{.0365 - .0202}{.0365 + .0385} = \frac{.0163}{.0750} = .2173$$

2. 定義により

$$\mu_{x+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{l_{x+\frac{1}{2}}} \left(\frac{d l_{x+t}}{dt} \right)_{t=\frac{1}{2}}$$

$$m_x = \frac{d_x}{\int_0^1 l_{x+t} dt}$$

仮定から

$$l_{x+t} = l_x - t d_x$$

これを $\mu_{x+\frac{1}{2}}$, m_x の定義式に代入すれば

$$\mu_{x+\frac{1}{2}} = m_x = \frac{d_x}{l_x - \frac{1}{2} d_x}$$

3.

(1) 毎年の支出額を P とすると、題意により次の式が成り立つ。

$$(P - Ki) S_{\overline{n}|} = K$$

よって

$$P = \frac{K}{S_{\overline{n}|}} + Ki \quad \left(= \frac{K}{a_{\overline{n}|}} \right)$$

(2) (1)と同様にして

$$(P - Ki) S_{\overline{n}|}^{(i')} = K$$

よって

$$P = \frac{K}{S_{\overline{n}|}^{(i')}} + Ki$$

- (3) t 年までの減債基金への積立金の終価は $(P - Ki) S_{\overline{t}|}^{(i')} (1 + i'_2)^{n-t}$,
 $t + 1$ 年以後の減債基金への積立金の終価は $(P - Ki) S_{\overline{n-t}|}^{(i'_2)}$ となるので次の式が
 成り立つ。

$$(P - Ki) S_{\overline{t}|}^{(i')} (1 + i'_2)^{n-t} + (P - Ki) S_{\overline{n-t}|}^{(i'_2)} = K$$

よって

$$P = \frac{K}{S_{\overline{t}|}^{(i')} (1 + i'_2)^{n-t} + S_{\overline{n-t}|}^{(i'_2)}} + Ki$$

午 後 の 部

4.

- (ア) 責任準備金に関する再帰公式

$$({}_t V + P)(1 + i) = g_{x+t} + P_{x+t} \cdot {}_{t+1} V$$

を P について解けば得られる。

- (イ) $\circ 1$ 項は危険保険料, $\circ 2$ 項は蓄積保険料と呼ばれる。

- (ウ) 期初に有する責任準備金 ${}_t V$ を期末に ${}_{t+1} V$ に積み増しするためには, 期初に

$(v \cdot {}_{t+1} V - {}_t V)$ の金額, 即ち蓄積保険料が確保されなければならない。その上に
 期中死亡者に保険金 1 を期末に支払うためには, 期末責任準備金 ${}_{t+1} V$ との差額, 即ち
 危険保険金を保険金とする 1 年定期保険の保険料に相当する金額 $v g_{x+t} (1 - {}_{t+1} V)$
 即ち危険保険料が必要である。即ち, 保険料は蓄積保険料と危険保険料の 2 部分に分解

されることを示している。

5.

(ア) に対応する死亡払戻金の給付現価は

$$P \cdot (IA)_{xy:\overline{n}|} \dots\dots\dots (1)$$

(イ) に対応する保険料払込期間中の年金給付の現価は

$$\ddot{a}_{y:\overline{n}|} - \ddot{a}_{xy:\overline{n}|} \dots\dots\dots (2)$$

(ウ) に対応する保険料払済後の期間の年金給付の現価は

$${}_n|\ddot{a}_x + {}_n|\ddot{a}_y - {}_n|\ddot{a}_{xy} \dots\dots\dots (3)$$

よって (ア), (イ)および(ウ)の給付現価の総額は (1) + (2) + (3) である。

一方、収入は両者共存の場合である。よって収入保険料の現価は

$$P_x \ddot{a}_{xy:\overline{n}|}$$

よって、求める年払純保険料 (P) は次式で与えられる。

$$P = \frac{(\ddot{a}_x + \ddot{a}_y) - (\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \ddot{a}_{xy})}{\ddot{a}_{xy:\overline{n}|} - (IA)_{xy:\overline{n}|}}$$

6.

$$\left\{ \begin{aligned} e^{-\int_0^\tau (\mu_{t+\tau} + \delta) d\tau} \cdot \frac{d}{d\tau} {}_{t+\tau}V - e^{-\int_0^\tau (\mu_{t+\tau} + \delta) d\tau} \cdot (\mu_{t+\tau} + \delta) \cdot {}_{t+\tau}V \\ = \frac{d}{d\tau} \left[e^{-\int_0^\tau (\mu_{t+\tau} + \delta) d\tau} \cdot {}_{t+\tau}V \right] \\ e^{-\int_0^\tau (\mu_{t+\tau} + \delta) d\tau} = e^{-\delta\tau} \cdot e^{\log l_{t+\tau}/l_t} = v^\tau \cdot l_{t+\tau}/l_t \end{aligned} \right.$$

に注意して、Thiele の微分方程式の両辺に $e^{-\int_0^\tau (\mu_{t+\tau} + \delta) d\tau}$ を乗じて、 $\tau = \nu$

より $\tau = 1$ まで積分すれば、

$$v^\tau \cdot (l_{t+\tau}/l_t) \cdot {}_{t+\tau}V \Big]_{\tau=\nu}^{\tau=1} + \int_{\nu}^1 v^\tau (l_{t+\tau}/l_t) \mu_{t+\tau} d\tau = 0$$

故に、端数期間に対する ${}_{t+\nu}V$ は、

$${}_{t+\nu}V = v^{1-\nu} \cdot (l_{t+1}/l_{t+\nu}) {}_{t+1}V + \int_{\nu}^1 v^{\tau-\nu} \cdot (l_{t+\tau}/l_{t+\nu}) \mu_{t+\tau} d\tau$$

($0 < \nu < 1$)

故に、また； ($0 < \nu < 1$ に対して)

$$\begin{aligned} {}_{t+\nu}V - v^{1-\nu} \cdot {}_{t+1}V &= -v^{1-\nu} \cdot \{1 - (l_{t+1}/l_{t+\nu})\} \cdot {}_{t+1}V \\ &\quad + \int_{\nu}^1 v^{\tau-\nu} \cdot (l_{t+\tau}/l_{t+\nu}) \mu_{t+\tau} d\tau \\ &\geq -v^{1-\nu} \cdot \{1 - (l_{t+1}/l_{t+\nu})\} \cdot {}_{t+1}V \\ &\quad - v^{1-\nu} \cdot \int_{\nu}^1 \frac{d}{d\tau} (l_{t+\tau}) / l_{t+\nu} d\tau \\ &= -v^{1-\nu} \cdot \{1 - (l_{t+1}/l_{t+\nu})\} \cdot {}_{t+1}V \\ &\quad + v^{1-\nu} \cdot \{1 - (l_{t+1}/l_{t+\nu})\} \\ &\geq 0, \quad (\text{実際、一般的には、} 1 \geq {}_{t+1}V \text{ だから。}) \end{aligned}$$

なお、 $\nu = 1$ のときは、明らか。

(補 足) 上記解答は、比較的エレガントと思われる解答の一例である。なお、微分方程式の解法は、一般の教科書記載の解法を含めて、当然に、どれを探ってもさしつかえない。また、端数期間に対する ${}_{t+\nu}V$ の形も、必ずしも上記のみではなく、要するに、微分方程式を正しく解くことによって求められた形ならば、当然にすべて正解である。以上、念の為。