昭和41年度　（問題）

午前の部

1.　ある人が n 個の鍵を持っていて，これである1つの扉をあけようとする。その試行は互に独立で，かつ放意的であるとする。

(a)　扉のあかなかった鍵は，束から除いて次の試行を行なう。

(b)　扉があかないとき，その鍵をもとの束にもどして次の試行を行なう。

の2つの場合について，扉があくまでの回数の平均値および分散を求めよ。

2.　独立な2つの確率変数 X，Y がそれぞれ次のような密度関数をもつ2項分布

$$f(x) = {}_5C_x p^x (1-p)^{5-x} \quad , \quad x = 0, 1, \cdots\cdots, 5$$

$$g(y) = p^y (1-p)^{1-y} \quad , \quad y = 0, 1$$

に従うとき，X＋Y もまた2項分布に従うことを特性関数または積率母関数を用いて証明し，さらにこの平均値および分散を求めよ。

3.　$$\triangle(u_x v_x) = u_x \triangle v_x + v_{x+1} \triangle u_x$$

を証明し，これを用いて

$$\sum_{x=0}^{n-1} (u_x \triangle v_x) = (u_n v_n - u_0 v_0) - \sum_{x=0}^{n-1} (v_{x+1} \cdot \triangle u_x)$$

を証明せよ。

また，この式を用いて

$$\sum_{x=0}^{n-1} x^4$$

を求めよ。

（注：$\triangle w_x = w_{x+1} - w_x$ である。）

〔問〕

午 後 の 部

4.　r_1 個のAと r_2 個のBを一列に並べる。Aの連がk個（ $k \leqq r_1$ ， $k \leqq r_2+1$ ）となる確率をもとめよ。

（注：「連について」……たとえばBABBAAABBとなっているときB，A，BB，AAA，BBはそれぞれ連である。この場合Aの連は2個，Bの連は3個とする。）

5.　n個の独立な事象E_1，E_2，……，E_n において，事象 E_1 の成立する確率は p_1，E_2 の成立する確率はp_2，……，E_n の成立する確率は p_n とする。

$$p=\frac{p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n}{n},\quad q=1-p$$

とおくと，このn個の事象のうちで，成立する個数Xを確率変数としたときその分散はnpqより大きくないことを証明せよ。

昭和 41 年度　（解答）

午 前 の 部

1. (a)　k 回目に扉の開く確率$=\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-2}{n-1}\cdots\dfrac{n-k+1}{n-k+2}\quad\dfrac{1}{n-k-1}=\dfrac{1}{n}$

扉の開く回数の期待値$=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}=\frac{n+1}{2}$

$$分\ 散=\sum_{k=1}^{n}\left(k-\frac{n+1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\frac{1}{n}\left(\Sigma k^2-(n+1)\Sigma k+\frac{n(n+1)^2}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{n}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)^2}{2}+\frac{n(n+1)^2}{4}\right)$$

$$=\frac{n^2-1}{12}$$

（注：分散$=\Sigma\dfrac{k^2}{n}-\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^2$ を用いた方がはやい）

(b)　k 回目に扉の開く確率$=\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{k-1}\cdot\dfrac{1}{n}$

扉の開く回数の期待値$=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty}k\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k-1}$$

今，　$S=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}k\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k-1}$　とおけば

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)S=\Sigma k\left(1-\frac{1}{n}\right)^k$$

$$\therefore\ S-\left(1-\frac{1}{n}\right)S=1+\left(1-\frac{1}{n}\right)+\left(1-\frac{1}{n}\right)^2+\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{n}S=n$$

$v_x = x + a$ ，（aは任意定数）となる。

これらを(1)に代入すれば

$$\sum_{x=0}^{n-1} x^4 = \sum_{x=0}^{n-1} u_x \triangle v_x = n^4(n+a) - \sum_{x=0}^{n-1}(x+1+a)(4x^3+6x^2+4x+1)$$

$$\therefore\ 5\sum_{x=0}^{n-1} x^4 = n^5 + a n^4 - \{(4a+10)\Sigma x^3 + (6a+10)\Sigma x^2 + (4a+5)\Sigma x + n(1+a)\}$$

一方，$\sum_{x=0}^{n-1} x^3 = \left\{\frac{n(n-1)}{2}\right\}^2$，$\sum_{x=0}^{n-1} x^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$，$\sum_{x=0}^{n-1} x = \frac{n(n-1)}{2}$

であるから，これらを上式に代入すればよい。（注1. Σx^3等が公式として直接出せないときは，さらに(1)式を用いて低次の和に還元して求めればよい。注2. ここでaの係数が消去されることは容易に検証できる。）

$$\therefore\ 5\sum_{x=0}^{n-1} x^4 = n^5 - \frac{5}{2}\{n(n-1)\}^2 - \frac{5}{3}n(n-1)(2n-1) - \frac{5}{2}n(n-1) - n$$

$$\sum_{x=0}^{n-1} x^4 = n(n-1)(2n-1)(3n^2-3n-1)$$

午後の部

4. 同じ文字の間の交換は新しい文字の配列を生じない。従って，A，Bをならべる方法は全部で$\binom{r_1+r_2}{r_1}$とおりある。

つぎに丁度k個A連があらわれるような並べ方は次の様に考えればよい。まず直線上にk個の場所を指定し，そこにAを1個ずつおく。次に残りのr_1-k個のAをこのk個の場所にさらに配ってやる。そのとき異なる並べ方を生む方法は，異なるk個の物からr_1-k個を重複を許してえらぶ組合せの数に等しい。従って，その総数は ${}_kH_{r_1-k} = \binom{r_1-1}{r_1-k} = \binom{r_1-1}{k-1}$ とおりある。さらに上のk個の場所の間の$k-1$個の場所にBを1つづつおく。これはk個の連という条件をみたすために必要である。次に残りのr_2-k+1個

のBをAをおいた$k-1$個の場所の間および先頭と末尾の合計$k+1$個の場所にさらに配ってやる。このとき異なる並べ方を生む方法は ${}_{k+1}H_{r_2-k+1}=\binom{r_2+1}{k}$ である。

従って，考えている事象の並べ方は$\binom{r_1-1}{k-1}\cdot\binom{r_2+1}{k}$とおりある。

故に求める確率は $\dfrac{\binom{r_1-1}{k-1}\binom{r_2+1}{k}}{\binom{r_1+r_2}{r_1}}$ である。

5.　確率変数 X_i を事象 E_i が成立すれば $X_i=1$，成立しなければ $X_i=0$ と定義すると，

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ は互に独立

X_i の分散 σ_i^2 は $\sigma_i^2=p_i(1-p_i)$

$$(\because E(X_i)=p_i,\ E\{(X_i-p_i)^2\}=p_i-p_i^2)$$

$$X=X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n$$

である。

よって　Xの分散 σ^2 は

$$\begin{aligned}\sigma^2&=\sigma_1^2+\sigma_2^2+\cdots\cdots+\sigma_n^2\\&=p_1(1-p_1)+p_2(1-p_2)+\cdots\cdots+p_n(1-p_n)\\&=p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n-(p_1^2+p_2^2+\cdots\cdots+p_n^2)\\&=np-\sum_{i=1}^{n}p_i^2\end{aligned}$$

ところで，

$$\frac{1}{n}(n\Sigma p_i^2-n^2p^2)=\frac{1}{n}\{n(p_1^2+\cdots\cdots+p_n^2)-(p_1+\cdots\cdots+p_n)^2\}$$

$$=\frac{1}{n}\{(n-1)(p_1^2+\cdots\cdots+p_n^2)-2\sum_{\substack{i,\ j=1\\(i\neq j)}}^{n}p_i\,p_j\}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{\substack{i,\ j=1 \\ (i \neq j)}}^{n} (p_i - p_j)^2 \geqq 0$$

$$\therefore \quad \sigma^2 \leqq np - np^2 = npq$$