〔問〕

昭和 40 年度　（問題）

午 前 の 部

1.　変数xにx_i($i=1, 2, \cdots\cdots, n$)の値を与えたとき，そのおのおのに対応する独立な観測値y_iに対する確率変数Y_iの構造式が，母数a，bをもつて

$$Y_i = ax_i + b + \varepsilon_i \ , (i=1, 2, \cdots\cdots, n)$$

で表わされるとする。ここでε_iはたがいに独立で，平均値0，分散σ^2の正規分布N(0，σ^2)に従うものとする。a，bの最尤推定量を求め，また，これらが不偏推定量であることを示せ。

2.　分散が未知の正規母集団の平均値検定の方法を論ぜよ。

午 後 の 部

3.　ある湖水からn匹の魚をとり，目印をつけて湖水にはなし，しばらくたつて1匹ずつ捕えてはもとにもどし，印のついた魚がえられるまで続ける。これに要した回数(最後の回は計算に入れない)をXとする。このようなことをm回くり返してx_1，x_2，……，x_mをえたとする。これをもとにして湖水の魚の総数を最尤推定法により推定せよ。ただし，この調査中に湖水の魚の生滅はないものとする。

4.　次の(1)，(2)，(3)の3問のうち，いずれか1問に答えよ。

(1)　次の双対をなす問題Ⅰ，Ⅱにおいて，それぞれの可能解を(x_1^0, x_2^0, ……, x_n^0)および(u_1^0, u_2^0, ……, u_m^0)とした場合，

$$c_1 x_1^0 + c_2 x_2^0 + \cdots\cdots + c_n x_n^0 = b_1 u_1^0 + b_2 u_2^0 + \cdots\cdots + b_m u_m^0$$

が成り立てば，これらは最適解であることを証明せよ。

問題Ⅰ　制約条件

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots\cdots + a_{1n} x_n \leqq b_1 ,$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots\cdots + a_{2n} x_n \leqq b_2 ,$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots\cdots + a_{mn}x_n \leqq b_m$,

$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0, \cdots\cdots,\ x_n \geqq 0$

のとき，$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots\cdots + c_nx_n$ の最大値を求めること。

問題Ⅱ　制約条件

$a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \cdots\cdots + a_{m1}u_m \geqq c_1$,

$a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \cdots\cdots + a_{m2}u_m \geqq c_2$,

$\cdots\cdots\cdots\cdots$

$a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \cdots\cdots + a_{mn}u_m \geqq c_n$,

$u_1 \geqq 0,\ u_2 \geqq 0, \cdots\cdots,\ u_m \geqq 0$

のとき，$b_1u_1 + b_2u_2 + \cdots\cdots + b_mu_m$ の最小値を求めること。

(2) m台の自動運転をしている機械の作業状態を考える。これらの機械はときどき故障を起こすので r 人の修理工を常時配置しておく。故障を起こした機械は１人の修理工によつて修理されるものとし，修理工の手が空いている限り，直ちに修理が開始される。

修理にかかつている機械が，その修理の終るまでに要する時間は指数分布に従うとし，その平均値を $\frac{1}{\mu}$ とする。

また機械が故障を起こす過程はパラメーター λ のポアソン過程をなすとする。

修理を待ち合わせ中の故障機械台数の確率分布を求めよ。

(3) 既知の正数 c に対し

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2\,p(x)\,dx = c$$

を満足する密度関数 $p(x)$ のうちで，エントロピー最大のものを求めよ。

昭和40年度　（解答）

午前の部

1.　$\varepsilon_i = Y_i - ax_i - b$ は $N(0, \sigma^2)$ に従うので，尤度関数は

$$L(a, b) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \cdot \sigma^{-n} \exp\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(y_i - ax_i - b)^2\}$$

したがつて，これを最大にするには $\log L(a, b)$ を最大にすれば良いから

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \log L(a, b)}{\partial a} &= \sigma^{-2}\Sigma x_i(y_i - ax_i - b) = 0 \\ \frac{\partial \log L(a, b)}{\partial b} &= \frac{1}{2}\sigma^{-2}\Sigma(y_i - ax_i - b) = 0 \end{aligned}\right\}$$

この連立方程式を解いて，a，b の最尤推定量として

$$\hat{a} = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})(Y_i - \bar{Y})}{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}, \quad \hat{b} = Y - \hat{a} \cdot x$$

を得る。また　$E(\bar{Y}) = a \cdot \bar{x} + b$　だから

$$E(\hat{a}) = \frac{E(x_i - \bar{x})(ax_i + b - a\bar{x} - b)}{\Sigma(x_i - \bar{x})^2} = a,$$

$$E(\hat{b}) = a\bar{x} + b - a\bar{x} = b,$$

となり，$\hat{a}$，$\hat{b}$ は不偏推定量である。

2.　尤度比検定を行なうとよい。

題意の母集団は正規であるから，確率密度函数は

$$f(x, m, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\}$$

である。mは平均値，σ^2 は分散である。

標本の数を n とすると，尤度は

$$L(m, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i, m, \sigma^2)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\right)^{n} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2\right\}$$

である。そこでmとσ^2との最尤推定値 $\hat{m}$ と $\hat{\sigma}^2$ とを求めてみると，L(m, σ^2)を最大にするには，log L (m, σ^2) を最大にすればよいから

$$\frac{\partial \log L(m,\ \sigma^2)}{\partial\ m} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)}{\sigma^2} = 0$$

$$\frac{\partial \log L(m,\ \sigma^2)}{\partial\ \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2}{2\sigma^4} = 0$$

の2つの式から

$$\hat{m} = \overline{X},\quad \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n}$$

を得る。$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ である。

さらに　m=m。とmを固定してL(m_0 , σ^2) の最尤推定値 $\hat{\sigma}_0^2$ を求めてみると，

$$\frac{d \log L(m_0,\sigma^2)}{d\ \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - m_0)^2}{2\sigma^4} = 0$$

を解いて

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m_0)^2$$

を得る。

したがつて，尤度比Λは

$$\Lambda = \frac{L(m_0,\ \sigma_0^2)}{L(m,\ \sigma^2)} = \left\{1 + \frac{n(\overline{X} - m_0)^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}\right\}^{-\frac{n}{2}}$$

$$= \left\{1 + \frac{T^2}{n-1}\right\}^{-\frac{n}{2}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(※)}$$

ここで，$T=\frac{1}{S}\sqrt{n-1}\,(\overline{X}-m_0)$，さらに $S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ である。

さて平均値 m_0 を尤度比により検定するというのは，有意水準 ε に対して

$$\Pr.\left\{\Lambda<\lambda\right\}=\varepsilon$$

なる λ を定め，標本 $(x_1,\cdots\cdots,x_n)$ に対する Λ が $\Lambda<\lambda$ であるか否かに従い，棄却あるいは受容することである。㈱式より

$$\Lambda<\lambda \iff T^2>(n-1)(\lambda^{-\frac{2}{n}}-1)$$

で，Tは自由度 $n-1$ の t－分布であるから，$t_0^2=(n-1)(\lambda^{-\frac{2}{n}}-1)$ とおけば，t－分布表から ε に対応する t_0 の値が求まる。

したがつて，m_0 はTに点 $(x_1,\cdots\cdots,x_n)$ を代入したとき $T\leqq t_0$ なら受容 $T>t_0$ なら棄却である。

午 後 の 部

3.　Xが従う分布法則は，魚の総数をNとすれば，

$$f(x\,;N)=\left(1-\frac{n_1}{N}\right)^x\frac{n_1}{N}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

今大きさmの標本 $(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_m)$ に対し尤度函数

$$L(N)=f(x_1\,;N)\cdot f(x_2\,;N)\cdots\cdots f(x_m\,;N)$$

を考える。これは $(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_m)$ を固定すればNの函数と考えられる。このL(N)を最大にする $N=\hat{N}$ が存在したとき $\hat{N}$ をNの最尤推定量という。これは次の方程式の根として求められる。

$$\frac{\partial\log L(N)}{\partial N}=0$$

$$\therefore\ \sum_{i=1}^{m}\frac{1}{f(x_i\,;N)}\cdot\frac{\partial f(x_i\,;N)}{\partial N}=0\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

(1)より

$$\frac{\partial f(x;\mathrm{N})}{\partial\ \mathrm{N}}=x\left(1-\frac{n_1}{\mathrm{N}}\right)^{x-1}\frac{n_1^2}{\mathrm{N}^3}-\left(1-\frac{n_1}{\mathrm{N}}\right)^{x}\frac{n_1}{\mathrm{N}^2}$$

$$=\left(1-\frac{n_1}{\mathrm{N}}\right)^{x-1}\frac{n_1}{\mathrm{N}^2}\left\{\frac{n_1}{\mathrm{N}}(x+1)-1\right\}$$

$$\therefore\ \frac{1}{f(x;\mathrm{N})}\ \frac{\partial f(x;\mathrm{N})}{\partial\ \mathrm{N}}=\frac{\frac{1}{\mathrm{N}}}{1-\frac{n_1}{\mathrm{N}}}\left\{\frac{n_1}{\mathrm{N}}(x+1)-1\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3)$$

(3)を(2)に代入

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{f(x_i;\mathrm{N})}\ \frac{\partial f(x_i;\mathrm{N})}{\partial\ \mathrm{N}}=\frac{\frac{1}{\mathrm{N}}}{1-\frac{n_1}{\mathrm{N}}}\left\{\frac{n_1}{\mathrm{N}}\left(\sum_{i=1}^{m}x_i+\mathrm{m}\right)-\mathrm{m}\right\}=0$$

$$\therefore\ \frac{n_1}{\hat{\mathrm{N}}}\left(\sum_{i=1}^{m}x_i+\mathrm{m}\right)-\mathrm{m}=0$$ （$\hat{\mathrm{N}}$はL(N)を最大にするNの値）

$$\therefore\ \hat{\mathrm{N}}=n_1+\frac{n_1}{\mathrm{m}}\sum_{i=1}^{m}x_i$$

4. (1) $\mathrm{A}(\mathrm{m}\times\mathrm{n})=(a_{ij})$, $\mathrm{U}(1\times\mathrm{m})=(\mathrm{u}_1,\mathrm{u}_2,\cdots\cdots,\mathrm{u}_\mathrm{m})$,

$\mathrm{C}(1\times\mathrm{n})=(\mathrm{c}_1,\mathrm{c}_2,\cdots\cdots,\mathrm{c}_\mathrm{n})$,

$\mathrm{X}(\mathrm{n}\times 1)=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_\mathrm{n}\end{pmatrix}$, $\mathrm{B}(\mathrm{m}\times 1)=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_\mathrm{m}\end{pmatrix}$ とすれば，

問題Ⅰは　$\mathrm{AX}\leqq\mathrm{B}$,　$\mathrm{X}\geqq 0$のとき　CXの最大化

問題Ⅱは　$\mathrm{UA}\geqq\mathrm{C}$,　$\mathrm{U}\geqq 0$のとき　UBの最小化　の問題となる。

X，Uを可能解とすれば，

$$\mathrm{CX}\leqq(\mathrm{UA})\mathrm{X}=\mathrm{U}(\mathrm{AX})\leqq\mathrm{UB}$$

したがって，$\mathrm{CX}^0=\mathrm{U}^0\mathrm{B}\geqq\mathrm{CX}$, $\mathrm{U}^0\mathrm{B}=\mathrm{CX}^0\leqq\mathrm{UB}$ だから，U^0, X^0はそれぞ

れ最適解となる。

(2) いま，n 台の機械が作業をしていない状態を E_n で表わす（$1 \leqq n \leqq m$）。
この状態では r 台の機械が修理にかかつており，残りの（$n-r$）台は修理を待つているわけである。

（t，$t+h$）の間での状態の変化を考えると

(i) $E_{n-1} \rightarrow E_n$ の確率は（$m-n+1$）台の中から１台の故障の生ずる確率だから

$(m-n+1)\lambda h + o(h)$,

(ii) $E_n \rightarrow E_n$ の確率は $1-\{(m-n)\lambda + [n, r]\mu\}h + o(h)$

$$[n, r] = \min(n, r)$$

(iii) $E_{n+1} \rightarrow E_n$ の確率は１台の機械の修理が終了する確率だから

$[n+1, r]\mu h + o(h)$ となる。

したがつて t と $t+h$ における状態を比較して，つぎの関係式が得られる。

$$P_n(t+h) = (m-n+1)\lambda h\, P_{n-1}(t) + \Big[1-\{(m-n)\lambda + [n, r]\mu\}h\Big] P_n(t) + [n+1, r]\mu h\, P_{n+1}(t) + o(h)$$

ここに $P_n(t)$ は時間 t において E_n の状態が起つている確率を表わすものとする。

したがつて，$t \rightarrow \infty$ で定常状態になつていると考え，そのときに E_n の起こる確率を p_n とすれば，上の関係から

$$\{(m-n)\lambda + [n, r]\mu\}p_n = (m-n+1)\lambda p_{n-1} + [n+1, r]\mu p_{n+1} \quad \cdots\cdots(1)$$

となるが，とくに $n=0$ のときは E_{-1} という状態はないから

$$m\lambda p_0 = \mu p_1 \quad \cdots\cdots(2)$$

となり，したがつて，

$$p_n = \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 \qquad (n \leqq r)$$

$$p_n = \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{r^{n-r}\, r!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 \qquad (n > r)$$

となる。ここに $\sum_{n=0}^{m} p_n = 1$ なるように p_0 を定める。

（待ち合わせが起こるのは $n > r$ のときで，そのときの待ち合わせ台数は（ $n-r$ ）台である。したがつて平均待ち合わせ台数は

$$w_r = \sum_{n \geqq r}^{m} (n-r) p_n$$

となる。）

(3) （変分法）変分法によれば，n個の付帯条件

$$\int g_j(x, p)\, dx = \text{const.} \qquad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

のもとに

$$J = \int f(x, p)\, dx$$

の極値（停留値）を求めたいという場合，ラグランジュの乗係数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ を用いて

$$F = f - \lambda_1 g_1 - \lambda_2 g_2 - \cdots - \lambda_n g_n$$

とおき，

$$\frac{\partial F}{\partial p} = 0$$

を付帯条件（および境界条件）のもとで解けばよい。

このとき，

$$\int \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} dx$$

が負（または正）ならば求める値は極大値（または極小値）になる。

（解） いまエントロピーをJと書くと，

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \log \frac{1}{p(x)}\, dx$$

となる。ここで対数は自然対数を用いる。

このとき，付帯条件は

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)\, dx = c \quad \cdots\cdots (1)$$

および

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\, dx = 1 \quad \cdots\cdots (2)$$

となるから，ラグランジュの乗係数をλ，μとして

$$F = p(x) \log \frac{1}{p(x)} - \lambda x^2 p(x) - \mu p(x)$$

とおき，

$$\frac{\partial F}{\partial p} = -1 - \log p(x) - \lambda x^2 - \mu = 0 \quad \cdots\cdots (3)$$

を解けばよいことになる。

式(3)より直ちに

$$p(x) = e^{-1-\mu}\, e^{-\lambda x^2}$$

これを条件(2)に代入すると

$$e^{-1-\mu} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2}\, dx = 1$$

となる。従つてλは正数でなければならない。

一方，正規分布に関する公式

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = 1$$

に対し，積分変数変換

$$t = \sqrt{2\lambda}\, x$$

を施すことにより

$$\sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2}\, dx = 1$$

となることから

$$p(x) = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}\ e^{-\lambda x^2}$$

となる。これは平均値0の正規分布にほかならない。

よつて条件(1)により，$p(x)$ は分散 c の正規分布であることになる。

この場合，式(3)の内容から

$$\frac{\partial^2 F}{\partial\ p^2} = -\frac{1}{p(x)} < 0$$

となるので，エントロピーJは

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi c}}\ e^{-\frac{x^2}{2c}}$$

のとき最大となることが判る。