昭和 40 年度　（問題）

午前の部

1.　$X_1, X_2, \cdots\cdots, X_k$ は独立な確率変数で，それぞれ平均値m，分散 $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \cdots\cdots, \sigma_k^2$ をもつとする。

$a_1+a_2+\cdots\cdots+a_k \neq 0$ なる定数 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_k$ に対して

$$Z = \frac{a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots\cdots + a_k X_k}{a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_k}$$

としたとき，Zの平均値と分散を求めよ。また，この分散は $a_1\sigma_1^2 = a_2\sigma_2^2 = \cdots\cdots = a_k\sigma_k^2$ となるような $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_k$ に対して最小となることを示せ。

2.　離散的な確率変数 X_1, X_2 および X_3 の同時確率密度を次の式で定義する。

$$P\{(X_1, X_2, X_3)=(0, 0, 0)\} = P\{(X_1, X_2, X_3)=(0, 1, 1)\}$$
$$=P\{(X_1, X_2, X_3)=(1, 0, 1)\} = P\{(X_1, X_2, X_3)=(1, 1, 0)\} = \frac{1}{4}$$

このとき X_1 と X_2，X_2 と X_3，X_3 と X_1 はそれぞれたがいに独立であるが，X_1, X_2, X_3 はたがいに独立ではないことを証明せよ。

3.　いま，ねずみ（前々月以前に出生）が2匹いる。毎月2匹のねずみから12匹の割合で子供が生まれ，新しく生まれたねずみは，翌々月から子供を生むものとする。ねずみは死なないとすれば n カ月後には何匹となるか。これを求める算式をつくれ。

午後の部

4.　確率変数Xの分布関数を $F(x)$ とする。$F(x)=\frac{1}{2}$ を満足する点 $x=m_e$ をこの分布の中央値と呼ぶ。点 c のまわりの一次の絶対積率 $E(|X-c|)$ は，$c=m_e$ のとき最小であることを，Xの分布が連続型のときについて証明せよ。

5.　密度関数が c, m を定数として

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{c}{c^2+(x-m)^2}, \quad (c>0)$$

〔問〕

によつて与えられる分布関数をコーシー分布という。

いま，針がその中点Pのまわりを水平に回転するようになつているとし，この水平面上にPを通らない直線ℓが固定されているとする。針がとまつたとき，それを延長した直線がℓと交わる点をAとし，Pからℓに下した垂線の足Oを原点として測つたℓ上のAの座標をXとする。針のとまる位置は回転の角度に関して一様であるとして，確率変数Xはコーシー分布に従うことを証明せよ。またこの場合，平均値を求めよ。

昭和 40 年度　（解答）

午前の部

1.　求めるZの平均値を E(z)，分散を $\sigma^2(z)$ とする。

題意より

$$E(x_1)=E(x_2)=\cdots\cdots=E(x_k)=m$$

$$\sigma^2(x_1)=\sigma_1^2,\ \sigma^2(x_2)=\sigma_2^2,\ \cdots\cdots,\ \sigma^2(x_k)=\sigma_k^2$$ である。

平均値は

$$E(z)=E\left(\frac{a_1x_1+a_2x_2+\cdots\cdots+a_kx_k}{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_k}\right)$$

$$=\frac{E(a_1x_1)+E(a_2x_2)+\cdots\cdots+E(a_kx_k)}{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_k}$$

$$=\frac{a_1E(x_1)+a_2E(x_2)+\cdots\cdots+a_kE(x_k)}{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_k}$$

$$=\frac{a_1m+a_2m+\cdots\cdots+a_km}{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_k}=m$$

分散は

$$\sigma^2(z)=\sigma^2\left(\frac{a_1x_1+a_2x_2+\cdots\cdots+a_kx_k}{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_k}\right)=\frac{\sigma^2(a_1x_1+a_2x_2+\cdots\cdots+a_kx_k)}{(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_k)^2}$$

$$=\frac{\sigma^2(a_1x_1)+\sigma^2(a_2x_2)+\cdots\cdots+\sigma^2(a_kx_k)}{(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_k)^2}$$

（$\because$ $x_1, x_2\cdots, x_k$ は独立だから）

$$=\frac{a_1^2\sigma^2(x_1)+a_2^2\sigma^2(x_2)+\cdots\cdots+a_k^2\sigma^2(x_k)}{(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_k)^2}$$

$$= \frac{a_1^2\sigma_1^2 + a_2^2\sigma_2^2 + \cdots\cdots + a_k^2\sigma_k^2}{(a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_k)^2}$$

次に，今求めた分散 $\sigma^2(z)$ が，$a_1\sigma_1^2 = a_2\sigma_2^2 = \cdots\cdots a_k\sigma_k^2$ なる $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_k$ に対して最小となることを示そう。

それには，

$$\sigma^2(z) = \frac{a_1^2\sigma_1^2 + a_2^2\sigma_2^2 + \cdots\cdots + a_k^2\sigma_k^2}{(a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_k)^2}$$

を，それぞれ $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_k$ について偏微分した結果を０と置いて，

$$\frac{\partial}{\partial a_1}\sigma^2(z) = \frac{2\{a_1\sigma_1^2(a_1+a_2+\cdots+a_k) - (a_1^2\sigma_1^2+\cdots+a_k^2\sigma_k^2)\}}{(a_1+a_2+\cdots+a_k)^3} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial a_2}\sigma^2(z) = \frac{2\{a_2\sigma_2^2(a_1+a_2+\cdots+a_k) - (a_1^2\sigma_1^2+\cdots+a_k^2\sigma_k^2)\}}{(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_k)^3} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial}{\partial a_k}\sigma^2(z) = \frac{2\{a_k\sigma_k^2(a_1+a_2+\cdots+a_k) - (a_1^2\sigma_1^2+\cdots+a_k^2\sigma_k^2)\}}{(a_1+a_2+\cdots+a_k)^3} = 0$$

ここに，$a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_k \fallingdotseq 0$ であるから，上式より

$$a_1\sigma_1^2 = a_2\sigma_2^2 = \cdots = a_k\sigma_k^2 = \frac{a_1^2\sigma_1^2 + a_2^2\sigma_2^2 + \cdots\cdots + a_k^2\sigma_k^2}{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}$$

のとき，$\sigma^2(z)$ は最小になる。

2. 先ず X_1 と X_2 とがたがいに独立であることを証明する。

$$P\{X_1 = 0, X_2 = 0\} = P\{(X_1, X_2, X_3) = (0, 0, 0)\} + P\{(X_1, X_2, X_3) = (0, 0, 1)\} = \frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{4}$$

全く同様に

$$P\{X_1 = 0, X_2 = 1\} = \frac{1}{4},\ P\{X_1 = 1, X_2 = 0\} = \frac{1}{4},\ P\{X_1 = 1, X_2 = 1\} = \frac{1}{4}$$

しかるに，

$$P\{X_1=0\}=P\{(X_1, X_2, X_3)=(0,\ 0,\ 0)\}+P\{(X_1, X_2, X_3)=(0,\ 0,\ 1)\}$$
$$+P\{(X_1, X_2, X_3)=(0,\ 1,\ 0)\}+P\{(X_1, X_2, X_3)=(0,\ 1,\ 1)\}$$
$$=\frac{1}{4}+0+0+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

全く同様に

$$P\{X_1=1\}=\frac{1}{2},\quad P\{X_2=0\}=\frac{1}{2},\quad P\{X_2=1\}=\frac{1}{2}$$

故に

$$P\{X_1=i,\ X_2=k\}=P\{X_1=i\}\,P\{X_2=k\},\ i=1,2,\quad k=1,2$$

すなわち X_1と X_2 とはたがいに独立である。

全く同様に X_2と X_3, X_3 と X_1 はそれぞれたがいに独立である。

次に, X_1, X_2, X_3 はたがいに独立でないことを証明する。

$$P\{X_1=0,\ X_2=0,\ X_3=0\}=P\{(X_1, X_2, X_3)=(0,\ 0,\ 0)\}=\frac{1}{4}$$

しかるに

$$P\{X_1=0\}\,P\{X_2=0\}\,P\{X_3=0\}=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$$

故に

$$P\{X_1=0,\ X_2=0,\ X_3=0\}\neq P\{X_1=0\}\,P\{X_2=0\}\,P\{X_3=0\}$$

これは X_1, X_2, X_3 がたがいに独立でないことを示している。

3. t 月後 ($t\geqq 2$) におけるねずみの数をU(t)とすると題意により,

$$U(t)=U(t-1)+6U(t-2)$$

$$U(0)=2$$

$$U(1)=2+6\times 2=14$$

この定差方程式の特殊解は 3^t または $(-2)^t$ である。

$\because$ $U(t)=P^t$ とおくと

$$P^t-P^{t-1}-6P^{t-2}=0$$

$\therefore\ P^2 - P - 6 = 0$

$(P-3)(P+2) = 0$

$\therefore\ P = 3 \quad \text{or} \quad -2$

したがつて一般解は，

$U(t) = C_1 \cdot 3^t + C_2(-2)^t$である。初期条件から

$U(0) = C_1 + C_2 = 2, \quad U(1) = 3C_1 - 2C_2 = 14$

$\therefore\ C_1 = \frac{18}{5}, \quad C_2 = -\frac{8}{5} \qquad \therefore\ U(t) = \frac{18}{5}3^t - \frac{8}{5}(-2)^t = \frac{2}{5}(3^{t+2} - (-2)^{t+2})$

午 後 の 部

4. 確率密度関数を$f(x)$とすれば

$$E(|X-c|) = \int_{-\infty}^{\infty} |x-c|\ f(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{c} (c-x)\,f(x)\,dx + \int_{c}^{\infty} (x-c)\,f(x)\,dx$$

また m_e は中央値であるから

$$\int_{-\infty}^{m_e} f(x)\,dx = \int_{m_e}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{2}$$

故に $c > m_e$ のとき

$$E(|X-c|) = \int_{-\infty}^{m_e} (c-x)\,f(x)\,dx + \int_{m_e}^{c} (c-x)\,f(x)dx + \int_{c}^{\infty} (x-c)\,f(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{m_e} (m_e - x + c - m_e)\,f(x)dx + 2\int_{m_e}^{c} (c-x)\,f(x)\,dx$$

$$+ \int_{m_e}^{\infty} (x - m_e + m_e - c)\,f(x)\,dx$$

$$= E(|X-m_e|) + 2\int_{m_e}^{c} (c-x)\,f(x)\,dx$$

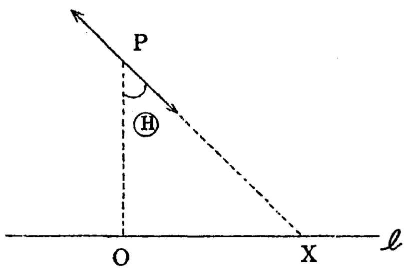
$$+ (c-m_e)\left[\int_{-\infty}^{m_e} f(x)\,dx - \int_{m_e}^{\infty} f(x)\,dx\right]$$

$$=E(|X-m_e|)+2\int_{m_e}^{c}(c-x)f(x)\,dx \geqq E(|X-m_e|)$$

また，$c<m_e$ のときも同様である。

従つて，$c=m_e$ のときに最小となる。

5.



針の位置はPからℓに下した垂線POとのなす角Ⓗによつて定まる。

Ⓗは$-\frac{\pi}{2}$から$\frac{\pi}{2}$までの範囲を動く値をとる確率変数であり，仮定によりこれは一様分布をしている。

ℓ上の点XはOからの距離$OX=x$によつて定まる。ただしOの右側を正，左側を負とする。この場合，Xもまた距離xの値をとる確率変数である。いま，$OP=a$とすれば，

$$X = a\tan Ⓗ$$

Ⓗは$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$で一様分布をしているから，$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$なる$\theta$につき

$$P\left(-\frac{\pi}{2}< Ⓗ \leqq \theta\right)=\frac{\theta+\frac{\pi}{2}}{\pi}$$

$$=P(-\infty< X \leqq a\tan\theta)$$

すなわち，Xの分布函数を$F(x)$とすれば，

$$F(a\tan\theta)=\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)/\pi$$

両辺を微分すれば

$$af(a\tan\theta)\sec^2\theta=1/\pi$$

が得られる。よつて $a\tan\theta=x$ とおけば

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{a}{a^2+x^2}$$

となる。よつてXはコーシー分布に従つている。

次に平均値を求めるに,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{a x}{a^2 + x^2}\, dx$$

$$= \frac{a}{2\pi} \lim_{\alpha\to\infty,\ \beta\to-\infty} \left[\log(a^2+\alpha^2) - \log(a^2+\beta^2) \right]$$

となり，これは不定である。従つて平均値は存在しない。

ただし，上の積分をコーシーの主値の意味でとるならば，すなわち

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = \lim_{\alpha\to\infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} x f(x)\, dx$$

とするなら，この値は明かに 0 に等しい。