昭和 40 年度 （問題）

午 前 の 部

1.
$$ {}_tV_x = \frac{P_x - P^{\ 1}_{x:\overline{t|}}}{P_{x:\overline{t|}}^{\ \ \ 1}} $$
を証明せよ。

2. 累加保険の現価（ $(IA)^{\ 1}_{x:\overline{n|}}$ ）と，累加年金の現価（ $(I\ddot{a})_{x:\overline{n|}}$ ）との間に次の関係があることを示せ。

$$ (IA)^{\ 1}_{x:\overline{n|}} = \ddot{a}_{x:\overline{n|}} - n \cdot {}_nE_x - d \cdot (I\ddot{a})_{x:\overline{n|}} $$

d は割引率とする。

3. 甲（ x 歳），乙（ y 歳），丙（ z 歳）の３人が次の条件をもつ年金を購入した。すなわち，３人全部が生存しているときは，３人でそれぞれ年金を３等分し，１人が死亡したときは，残りの２人で生存中，年金を２等分し，２人が死亡した場合には，残りの生存者が１人で年金全部を受取る。３人がそれぞれ負担すべき一時払保険料はいか程か。ただし，年金年額は１とし期末払とする。

午 後 の 部

次の６問のうち４,５,６の３問または，７,８,９の３問のどちらかの組をえらんで解答せよ。

4. 年払純保険料 P_x が ．０２４１５であるとき月払純保険料（真保険料）はいくらとなるか。ただし，年利率を４％とする。

5. 養老保険の将来法純保険料式責任準備金の公式から Fackler の公式（責任準備金の再帰方程式）を導け。

6. $\mu_x = A + Hx + BC^x$ のとき，ℓ_x は $k\,s^x\,w^{x^2}\,g^{c^x}$ の形で与えられる。この場合 A，H，B を s，w，g，c であらわせ。

7. 給料指数について，$b_{x_0} = b'_{x_0}$ ，$b_x \geqq b'_x$ （ $x = x_0 + 1, \cdots\cdots, x_r - 1$ ），$b_{x_r} = b'_{x_r}$ （ x_r は定年年令）の関係があり，他の基礎率はすべて同一とする。以上の条件に

もとづく定年給付のみの同一年金制度の全期平準払保険料率は $P_{x_0} \leqq P'_{x_0}$ となることを示せ。但し，P_{x_0} は $\{b_x\}$，P'_{x_0} は $\{b'_x\}$ に対応する料率とする。

8. 完全年金制度（Full Pension）において，発足時の加入者全員について単一の全期平準払保険料を適用して算定した過去勤務債務と，みなし加入年齢系列別にそれぞれ対応する全期平準払加入年齢保険料を適用して計算した責任準備金とが等しくなつた。この場合，単一保険料は加入年齢保険料の加重平均として求められることを定額制の場合について示せ。

9. (1) 年金現価率が次式で表現される年金はどのような給付条件のものか説明せよ。

$$\bar{a}_{y|x} = \int_0^\infty v^t \, {}_tp_x (1 - {}_tp_y) \, dt$$

(2) 上式は次の形に変形できることを示せ。

$$\bar{a}_{y|x} = \int_0^\infty v^t \, {}_tp_{xy} \, \mu_{y+t} \, \bar{a}_{x+t} \, dt$$

昭和 40 年度　（解答）

午前の部

1.

$$\text{右辺} = \frac{\dfrac{M_x}{N_x} - \dfrac{M_x - M_{x+t}}{N_x - N_{x+t}}}{\dfrac{D_{x+t}}{N_x - N_{x+t}}}$$

$$= \frac{M_x(N_x - N_{x+t}) - N_x(M_x - M_{x+t})}{N_x D_{x+t}}$$

$$= \frac{N_x M_{x+t} - M_x N_{x+t}}{N_x D_{x+t}}$$

$$= \frac{M_{x+t}}{D_{x+t}} - \frac{M_x}{N_x} \frac{N_{x+t}}{D_{x+t}}$$

$$= A_{x+t} - P_x \cdot \ddot{a}_{x+t} = {}_tV_x$$

2. $(IA)^{1}_{x:\overline{n|}} = \dfrac{1}{D_x}(R_x - R_{x+n} - n\,M_{x+n})$

$(I\ddot{a})_{x:\overline{n|}} = \dfrac{1}{D_x}(S_x - S_{x+n} - n \cdot N_{x+n})$

$M_x = vN_x - N_{x+1}$

$R_x = vS_x - S_{x+1}$

$$(IA)^{1}_{x:\overline{n|}} = \frac{1}{D_x}\Big(vS_x - S_{x+1} - vS_{x+n} + S_{x+n+1} - n \cdot v \cdot N_{x+n} + n \cdot N_{x+n+1}\Big)$$

$$= \frac{1}{D_x}\left[v(S_x - S_{x+n} - n N_{x+n}) - (S_{x+1} - S_{x+n+1} - n N_{x+n+1}) \right]$$

$$= \frac{1}{D_x}\left[v(S_x - S_{x+n} - n \cdot N_{x+n}) - (S_x - S_{x+n} - n N_{x+n} - N_x + N_{x+n} + n D_{x+n}) \right]$$

$$= v(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} - (I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} + \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - n \cdot {}_nE_x$$

$$= \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - n \cdot {}_nE_x - d(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|}$$

3. まず甲の取分の現価は次のようにして求められる。

(a) 3人が生存中の甲の取分は$\frac{1}{3}$であるから，この期間中の現価は，

$$\frac{1}{3}\ a_{xyz}$$

(b) 乙が最初に死亡すれば甲は丙と$\frac{1}{2}$づつ受取る。同様に丙が最初に死亡すれば甲は乙と$\frac{1}{2}$づつ受取る。よつて，この部分の現価は

$$\frac{1}{2}(a_{y|xz} + a_{z|xy}) = \frac{1}{2} a_{xz} + \frac{1}{2} a_{xy} - a_{xyz}$$

(c) 乙，丙の最終生存者が死亡した後は，甲1人で年金を受取る。

よつて甲の取分の現価は

$$a_{\overline{yz}|x} = a_x - a_{xy} - a_{xz} + a_{xyz}$$

よつて甲の取分の現価は，(a)，(b)，(c) の合計額である。即ち，

$$\frac{1}{3} a_{xyz} + (\frac{1}{2} a_{xz} + \frac{1}{2} a_{xy} - a_{xyz})$$
$$+ (a_x - a_{xy} - a_{xz} + a_{xyz})$$
$$= a_x - \frac{1}{2}(a_{xy} + a_{xz}) + \frac{1}{3} a_{xyz} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

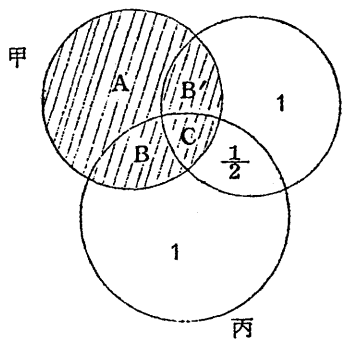
同様に乙および丙の現価は，

$$a_y - \frac{1}{2}(a_{xy} + a_{yz}) + \frac{1}{3} a_{xyz} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

$$a_{z} - \frac{1}{2}(a_{xz} + a_{yz}) + \frac{1}{3} a_{xyz} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3)$$

したがつて，甲，乙，丙の負担すべき一時払保険料は，(1)，(2)および(3)となる。

〔別　解〕



甲，乙，丙の生，死の状況を左図のごとく図示する。円内を生存，円外を死亡と定義する。
甲が年金を受取る状態はA，B，B′，Cに区分される。

A領域の年金額は1，年金現価は，

$$1\,(a_{x} - (a_{xy} + a_{yz}) + a_{xyz})$$

B＋B′領域の年金額は$\frac{1}{2}$，年金現価は，

$$\frac{1}{2}(a_{xy} + a_{xz} - 2\,a_{xyz})$$

C領域の年金額は$\frac{1}{3}$，年金現価は，

$$\frac{1}{3}(a_{xyz})$$

よつて，甲の負担すべき一時払保険料は，

$$a_{x} - \frac{1}{2}(a_{xy} + a_{xz}) + \frac{1}{3}\,a_{xyz}$$

同様に，乙および丙の一時払保険料は，

$$a_{y} - \frac{1}{2}(a_{xy} + a_{yz}) + \frac{1}{3}\,a_{xyz}$$

$$a_{z} - \frac{1}{2}(a_{xz} + a_{yz}) + \frac{1}{3}\,a_{xyz}$$

午 後 の 部

4. $$P_x^{(m)} = \frac{P_x}{1-\frac{m-1}{2m}(P_x+d)}$$

なることから

$$P_x^{(12)} = \frac{.02415}{1-\frac{11}{24}(.02415+.03846)} = \frac{.02415}{1-.02870} = .02486$$

したがつて

$$\text{月払純保険料} = \frac{P_x^{(12)}}{12} = .00207$$

5. 養老保険責任準備金将来法の公式は，

$${}_tV_{x:\overline{n}|} = A_{x+t:\overline{n-t}|} - P_{x:\overline{n}|}\ \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$$

両辺に $P_{x:\overline{n}|}$ を加える

$${}_tV_{x:\overline{n}|} + P_{x:\overline{n}|} = A_{x+t:\overline{n-t}|} - P_{x:\overline{n}|}\, a_{x+t:\overline{n-t-1}|}$$

一方

$$A_{x+t:\overline{n-t}|} = v\,q_{x+t} + v\,p_{x+t}\cdot A_{x+t+1:\overline{n-t-1}|}$$

これを上式に代入

$$\begin{aligned}{}_tV_{x:\overline{n}|}+P_{x:\overline{n}|} &= v\,q_{x+t} + v\cdot p_{x+t}\cdot A_{x+t+1:\overline{n-t-1}|} - P_{x:\overline{n}|}\,v\,p_{x+t}\,\ddot{a}_{x+t+1:\overline{n-t-1}|} \\ &= v\,q_{x+t} + v\,p_{x+t}\,(A_{x+t+1:\overline{n-t-1}|} - P_{x:\overline{n}|}\,\ddot{a}_{x+t+1:\overline{n-t-1}|})\end{aligned}$$

$${}_tV_{x:\overline{n}|} + P_{x:\overline{n}|} = v\,(q_{x+t} + p_{x+t}\cdot {}_{t+1}V_{x:\overline{n}|})$$

$${}_{t+1}V_{x:\overline{n}|} = \frac{1+i}{p_{x+t}}({}_tV_{x:\overline{n}|} + P_{x:\overline{n}|}) - \frac{q_{x+t}}{p_{x+t}}$$

6.

$$\mu_x = A + Hx + Bc^x \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

$\ell_x = k\, s^x\, w^{x^2}\, g^{c^x}$ なることから

$$\mu_x = -\frac{1}{\ell_x}\frac{d\ell_x}{dx} = -\frac{d}{dx}\log \ell_x = -\frac{d}{dx}\left(\log k + x\log s + x^2\log w + c^x \log g\right)$$

$$= -\left(\log s + 2x\log w + c^x \log c \log g\right) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

(1)，(2)の２式から

$$A = -\log s$$

$$H = -2\log w$$

$$B = -\log c \log g$$

7. 定年における給付現価をＳとすれば P_{x_0} P'_{x_0} は夫々次のようにあらわされる。

$$P_{x_0} = \frac{S\, b_{x_r}\, D_r}{\sum_{y=x_0}^{x_r-1} b_y\, D_y}$$

$$P'_{x_0} = \frac{S\, b'_{x_r}\, D_r}{\sum_{y=x_0}^{x_r-1} b'_y\, D_y}$$

一方， $b_x \geqq b'_x$ から $\sum_{y=x_0}^{x_r-1} b_y\, D_y \geqq \sum_{y=x_0}^{x_r-1} b'_y\, D_y$

又，$b_{xr} = b'_{xr}$ であるから明らかに

$$\frac{S\ b_{xr}\ D_r}{\sum_{y=x_0}^{xr-1} b_y\ D_y} \leqq \frac{S\ b'_{xr}\ D_r}{\sum_{y=x_0}^{xr-1} b'_y\ D_y}$$

即ち，　$P_{x_0} \leqq P'_{x_0}$

8.　単一の全期平準払保険料Pを適用したときの初期債務は

$$U = \sum_{\lambda}\sum_{x} G_{\lambda x}\ U_{\lambda x} = \sum_{\lambda}\sum_{x} G_{\lambda x} \cdot \frac{1}{D_x}\left(\sum_{\tau=x} \overline{C}_{\tau}\ S_{\tau(\lambda)} - PN_x\right)$$

ここに　λ　：　加入年齢

x　：　現在年齢

$G_{\lambda x}$ ：　加入年齢 λ，現在年齢 x の総人員

$S_{\tau(\lambda)}$ ：　加入年齢 λ，加入期間（$\tau - \lambda$）の給付

上式に加入年齢 λ に対応する全期平準払加入年齢保険料 P_λ を導入して変形すると，

$$= \sum_{\lambda}\sum_{x} G_{\lambda x} \cdot \frac{1}{D_x}\left(\sum_{\tau=x} \overline{C}_{\tau}\ S_{\tau(\lambda)} - P_\lambda N_x + (P_\lambda - P)\ N_x\right)$$

$$= \sum_{\lambda}\sum_{x} G_{\lambda x}\left(V_{\lambda x} + (P_\lambda - P) \cdot \frac{N_x}{D_x}\right) = V + \sum_{\lambda}\sum_{x} G_{\lambda x}(P_\lambda - P)\frac{N_x}{D_x}$$

ここに　$V_{\lambda x}$ ：加入年齢系列別に P_λ を適用したときの責任準備金

題意により　$U = V$

よって　$$\sum_{\lambda}\sum_{x} G_{\lambda x}\ (P_\lambda - P)\ \frac{N_x}{D_x} = 0$$

$$\sum_{\lambda} P_\lambda \sum_{x} G_{\lambda x} \frac{N_x}{D_x} = P\sum_{\lambda}\sum_{x} G_{\lambda x} \frac{N_x}{D_x}$$

故に　$$P = \frac{\sum_{\lambda} P_\lambda \sum_{x} G_{\lambda x} \frac{N_x}{D_x}}{\sum_{\lambda}\sum_{x} G_{\lambda x} \cdot \frac{N_x}{D_x}}$$

すなわち，Pは P_λ の加重平均である。

9. (1) 簡単な変形によつて

$$\bar{a}_{y|x} = \bar{a}_x - \bar{a}_{xy}$$

と表わすことができるから，(y)の死後，(x)の生存を条件として，連続払年金を給付するものであることが分る。

(2) $1 - {}_tp_y = \int_0^t {}_sp_y \ \mu_{y+s} \ dS$ を代入して

$$\bar{a}_{y|x} = \int_0^\infty \int_0^t v^t \cdot {}_tp_y \cdot {}_sp_y \cdot \mu_{y+s} \ dS \ dt$$

$$= \int_0^\infty \int_s^\infty v^t \cdot {}_tp_x \cdot {}_sp_y \cdot \mu_{y+s} \ dt \ dS$$

$$= \int_0^\infty {}_{s|}\bar{a}_x \cdot {}_sp_y \cdot \mu_{y+s} \ dS$$

$$= \int_0^\infty v^s \ {}_sp_{xy} \ \mu_{y+s} \ \bar{a}_{x+s} \ dS$$