〔問〕

昭和39年度　（問題）

午前の部

1. n年間，各年始に　1＋(前回までの給付の合計のk倍) を給付する年金の現価は，予定利率を変更することによって，n年間，各年始に1を給付する年金の現価に等しくなることを示せ。

たゞし，kは一定で当初の予定利率より小さいものとし，初回の給付は1とする。

2. 保険期間中の死亡に対し，次のような給付を行なうn年満期生存保険がある。

(1) 第1保険年度内の死亡に対し　0

(2) 第t ($n \geqq t > 1$) 保険年度内の死亡に対し，第t－1年度末責任準備金(純保険料式)を予定利率で1年利殖した金額を第t年度末に支払う。

x才加入の年払平準純保険料を求めよ。

3. 元本1なる元本保証終身年金の年金額を期始払の場合bとすれば，期末払の場合の年金額は $\frac{b}{1-b}$ となることを証明せよ。

たゞし，この場合元本保証とは，既に支払った年金額の合計が元本に達しない場合に死亡が起きれば，その差額を死亡直後に支払うものをいう。また，付加保険料はないものとする。

午後の部

次の6問のうち，4, 5, 6の3問または，7, 8, 9の3問のどちらかの組をえらんで解答せよ。

4. ある年令において終身保険の一時払保険料は　0.24203であり，また年払保険料は0.01754であるという。予定利率を求めよ。たゞし，保険金は1とし，保険金は期末払，付加保険料は

	一時払	年払
新契約費	保険金対千30円	保険金対千30円
維持費	保険金対千　2円	保険金対千　5円
集金費	なし	保険料の3％

とする。

5. $$\begin{cases} q'_y = q_y + \dfrac{k}{v\ddot{a}_{y+1}} & (x \leqq y < x+m) \\ k = \dfrac{\ddot{a}_{x+m}}{\ddot{a}'_{x+m}} - 1 \end{cases}$$

のとき終身保険，保険金期末払について

$$ {}_tV_x = {}_tV'_x \qquad (0 \leqq t \leqq m)$$

なることを証明せよ。

6. m年払込n年満期生存保険で，満期前の死亡者には死亡の際既払込保険料を返還する場合の年払純保険料および営業保険料を求めよ。

たゞし，新契約費は保険金のα倍，維持費は保険料払込中が保険金のγ倍と保険料のβ倍，払済後が保険金のδ倍とする。

7. 年金が年4回期末払，かつ，死亡の際，死亡した日の属する月までの給付が支払われる場合の終身年金現価式

$$\overset{(12)\,(4)}{a_x} \doteqdot \frac{1}{D_x}\left(N_x - \frac{5}{8}D_x + \frac{1}{6}\overline{M}_x\right)$$

を証明せよ。

8. 年金制度において，その綜合保険料率および到達年令式保険料率を夫々 P(Agg), P(x, t), ($x=x_0, \cdots, r-1$; $t=0, \cdots, r-x_0-1$) としたときに，次の関係が成立することを示せ。

$$\max_{x,\,t} P(x,t) \geqq P(Agg) \geqq \min_{x,\,t} P(x,t)$$

9. 年金額が加入全期間の平均給与に，加入期間の年数によって定まる支給率を乗じて得られる退職年金制度（遺族給付なし）の平準純保険料式責任準備金を

(1) 過去の実績給与の平均に，給与指数を含まない責任準備金率を乗じて得られる部分と

〔問〕

(2) その時の現在給与に，給与指数を含んだ責任準備金率を乗じて得られる部分とに分けて，それぞれの算式を示せ。

昭和 39 年度 （解答）

午前の部

1. 才 t 回目の給付を A_t で表わすと，$t>1$ の場合，題意により

$$A_t = 1+k\sum_{\tau=1}^{t-1} A_\tau \qquad 従って\quad A_{t-1} = 1+k\sum_{\tau=1}^{t-2} A_\tau \cdots\cdots (*)$$

また，$A_t = 1+k\left(A_{t-1}+\sum_{\tau=1}^{t-2} A_\tau\right)$ であるから(*)を用いて A_t と A_{t-1} との間に

$$A_t = (1+k)A_{t-1}$$

なる関係のあることがわかる。

従って　$A_t = (1+k)^{t-1}A_1 = (1+k)^{t-1}$　（∵題意により $A_1=1$）

よって，この年金の現価は，当初の予定利率を i とすれば，

$$\sum_{\tau=0}^{n-1} v^\tau A_{\tau+1} = \sum_{\tau=0}^{n-1} v^\tau(1+k)^\tau = \sum_{\tau=0}^{n-1}\left(\frac{1+k}{1+i}\right)^\tau = \sum_{\tau=0}^{n-1}\left(\frac{1}{1+\frac{i-k}{1+k}}\right)^\tau$$

であるから，$i \to j = \dfrac{i-k}{1+k}$ なる変更により，$\sum_{\tau=0}^{n-1} v'^\tau$　$\left(v' = \dfrac{1}{1+j}\right)$ となる。

（なお，生命関数を用いても，本質的に変りはない。）

2. 求める保険料をP，才 t 年度末責任準備金を ${}_tV$ とすれば，責任準備金の漸化式は次のようになる。

$$v\,p_{x+t}\cdot{}_{t+1}V = {}_tV + P - v\,q_{x+t}\cdot(1+i)\,{}_tV \quad （但し i は予定利率）$$

$$右辺 = {}_tV+P-q_{x+t}\cdot{}_tV = (1-q_{x+t})\,{}_tV + P = p_{x+t}\cdot{}_tV+P$$

$$\therefore v\,p_{x+t}\cdot{}_{t+1}V = p_{x+t}\cdot{}_tV+P$$

両辺に $\dfrac{v^t}{p_{x+t}}$ を乗じて $t=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1$ とし，辺々相加えて ${}_0V=0$，

${}_nV=1$ に注意すれば，

$$v^n = P\cdot\sum_{\tau=0}^{n-1}\frac{v^\tau}{p_{x+\tau}}$$

$$\therefore \quad P = \frac{v^n}{\sum_{\tau=0}^{n-1} \frac{v^\tau}{p_{x+\tau}}} = \frac{v^n}{\sum_{\tau=0}^{n-1} v^{\tau+1} \frac{D_{x+\tau}}{D_{x+\tau+1}}}$$

3. 元本１なる元本保証終身年金の期始払の年金額を b とすれば

$$1 = b\ddot{a}_x + \sum_{t=1}^{n}{}' \frac{\overline{C}_{x+t-1}(1-bt)}{D_x} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

たゞし，Σ' は正のもの全部を加える。すなわち　$bn \leqq 1 < b(n+1)$

いま

$$\frac{b}{1-b} = b'$$

とおくと

$$b = \frac{b'}{1+b'}$$

これを(1)に代入すると

$$1 = \frac{b'}{1+b'}\ddot{a}_x + \sum_{t=1}^{n}{}' \frac{\overline{C}_{x+t-1}\left(1-\frac{b'}{1+b'}t\right)}{D_x}$$

これから

$$1+b' = b'\ddot{a}_x + \sum_{t=1}^{n}{}' \frac{\overline{C}_{x+t-1}\{1-b'(t-1)\}}{D_x}$$

すなわち

$$1 = b'a_x + \sum_{t=1}^{n} \frac{\overline{C}_{x+t-1}\{1-b'(t-1)\}}{D_x} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

たゞし，Σ は正のもの全部を加える。すなわち　$b'(n-1) \leqq 1 < b'n$

(2)式は，元本１なる元本保証終身年金の期末払の場合の年金額が b' であることを示している。

〔別　解〕

元本1なる元本保証終身年金の期始払の場合の年金額を b とすれば,

$$1 = b\ddot{a}_x + \sum_{t=1}^{n} \overline{C}_{x+t-1}\ (1-bt) / D_x$$

ただし　$bn \leqq 1 < b(n+1)$

これから

$$1-b = b\, a_x + \sum_{t=1}^{n} \overline{C}_{x+t-1}\ \{(1-b) - b(t-1)\} / D_x$$

これは元本が $1-b$ であるときの期末払の年金額が b であることを示している。したがって元本が1であるならば,このときの年金額は $\dfrac{b}{1-b}$ である。

午後の部

4. 題意により

一時払　$A_x + .030 + .002\ddot{a}_x = .24203$ …………………… (1)

年　払　$\dfrac{1}{.97}\left(P_x + \dfrac{.030}{\ddot{a}_x} + .005\right) = .01754$

年払の式から

$$\frac{A_x + .030 + .005\ddot{a}_x}{.97\ddot{a}_x} = .01754$$

$$A_x + .030 + .005\ddot{a}_x = .017014\ddot{a}_x$$

$$A_x + .030 - .012014\ddot{a}_x = 0 \quad \text{……………………} \quad (2)$$

(1)−(2)　$.014014\ddot{a}_x = .24203$

$$\ddot{a}_x = 17.270$$

(1)に代入して

$$A_x = .21203 - .002 \times 17.270 = .17749$$

$A_x = 1 - d\ddot{a}_x$ なることから

$$d = \frac{1-A_x}{\ddot{a}_x} = \frac{.82251}{17.270} = .04763$$

$$d = \frac{i}{1+i}$$ なることから

$$i = \frac{d}{1-d} = \frac{.04763}{.95237} = .05$$

答　5%

5.
$$q'_y = q_y + \frac{k}{v\,\ddot{a}_{y+1}} \quad (x \leqq y < x+m)$$

なることから同じyに対して

$$p_y = p'_y + \frac{k}{v\,\ddot{a}_{y+1}}$$

一方

$$k = \frac{\ddot{a}_{x+m}}{\ddot{a}'_{x+m}} - 1$$

なることから

$$\ddot{a}_{x+m} = (1+k)\,\ddot{a}'_{x+m}$$

ここで

$$\begin{aligned}
\ddot{a}_{x+m-1} &= 1 + v\,p_{x+m-1}\,\ddot{a}_{x+m} \\
&= 1 + v\left(p'_{x+m-1} + \frac{k}{v\,\ddot{a}_{x+m}}\right)\ddot{a}_{x+m} \\
&= 1 + v\,p'_{x+m-1}\,\ddot{a}_{x+m} + k \\
&= (1+k) + v\,p'_{x+m-1}\,(1+k)\,\ddot{a}'_{x+m} \\
&= (1+k)(1 + v\,p'_{x+m-1}\,\ddot{a}'_{x+m}) \\
&= (1+k)\,\ddot{a}'_{x+m-1}
\end{aligned}$$

同様に

$$\ddot{a}_{x+m-2} = (1+k)\,\ddot{a}'_{x+m-2}$$

....

$$\ddot{a}_x = (1+k)\,\ddot{a}'_x$$

さて

$${}_tV_x = {}_tV'_x$$

を証明するには

$$1-\frac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_x} = 1-\frac{\ddot{a}'_{x+t}}{\ddot{a}'_x}$$

から $\dfrac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}'_{x+t}} = \dfrac{\ddot{a}_x}{\ddot{a}'_x} \qquad (0 \leqq t \leqq m)$ ………………… (1)

を示せばよい。

ところが

$$\frac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}'_{x+t}} = 1+k \qquad (0 \leqq t \leqq m)$$

なることは前の結論から出ているので (1)式は成立する。

6. ${}_m\pi_{x:\overline{n}|}$, ${}_m\pi'_{x:\overline{n}|}$ を夫々求める純保険料および営業保険料とする。

純保険料の収入現価は,

$${}_m\pi_{x:\overline{n}|}\,\frac{N_x - N_{x+m}}{D_x} = {}_m\pi_{x:\overline{n}|}\cdot\ddot{a}_{x:\overline{m}|} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

である。

死亡者には既払込保険料(もちろん既払込み営業保険料)を返還するのであるから，死亡返還金は

$k \cdot {}_m\pi'_{x:\overline{n}|}$, $k \leq m$ 才 k ($k \leq m$)保険年度中の死亡者に対する死亡返還金

$m \cdot {}_m\pi'_{x:\overline{n}|}$ 才 $m+1$ 保険年度以降の死亡者に対する死亡返還金

であり，この現価は

$$\frac{1}{D_x}\left(\sum_{k=1}^{m} k\cdot{}_m\pi'_{x:\overline{n}|}\cdot\overline{C}_{x+k-1} + \sum_{k=m+1}^{n} m\cdot{}_m\pi'_{x:\overline{n}|}\,\overline{C}_{x+k-1}\right)$$

$$=\frac{1}{D_x}\cdot {}_m\pi'_{x:\overline{n|}}\left(\sum_{k=1}^{m} k\cdot \overline{C}_{x+k-1}+\sum_{k=m+1}^{n} m\cdot \overline{C}_{x+k-1}\right)$$

$$=\frac{1}{D_x}\cdot {}_m\pi'_{x:\overline{n|}}\left\{\overline{R}_x-\overline{R}_{x+m}-m\overline{M}_{x+m}+m(\overline{M}_{x+m}-\overline{M}_{x+n})\right\}$$

$$={}_m\pi'_{x:\overline{n|}}\ \frac{\overline{R}_x-\overline{R}_{x+m}-m\overline{M}_{x+n}}{D_x}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

$$\because \overline{R}_x-\overline{R}_{x+m}=\sum_{k=1}^{m}\overline{M}_{x+k-1}=\sum_{k=1}^{m}\{k-(k-1)\}\overline{M}_{x+k-1}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}k\overline{M}_{x+k-1}-\sum_{k=1}^{m}(k-1)\overline{M}_{x+k-1}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}k\overline{M}_{x+k-1}-\sum_{k=1}^{m-1}k\overline{M}_{x+k}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}k(\overline{M}_{x+k-1}-\overline{M}_{x+k})+m\overline{M}_{x+m}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}k\overline{C}_{x+k-1}+m\overline{M}_{x+m}$$

となる。

満期のさいの支払現価は

$$\frac{D_{x+n}}{D_x}={}_nE_x\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3)$$

であるから，(1)，(2)，(3)式より，純保険料は

$${}_m\pi_{x:\overline{n|}}\cdot \ddot{a}_{x:\overline{m|}}={}_m\pi'_{x:\overline{n|}}\ {}_m(I\overline{A})_{x:\overline{n|}}+{}_nE_x\ \cdots\cdots\cdots \quad (4)$$

こゝに，
$${}_m(I\overline{A})_{x:\overline{n|}}=\frac{\overline{R}_x-\overline{R}_{x+m}-m\overline{M}_{x+n}}{D_x}$$

である。

営業保険料は純保険料と付加保険料から，

$${}_{m}\pi'_{x:\overline{n}|} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{m}|} = {}_{m}\pi_{x:\overline{n}|} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \alpha + (\gamma-\delta)\ddot{a}_{x:\overline{m}|} + \delta\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$

$$+ \beta\,{}_{m}\pi'_{x:\overline{n}|}\ a_{x:\overline{m}|} \cdots\cdots\cdots \quad (5)$$

となる。

(4)式を(5)式に代入して ${}_{m}\pi'_{x:\overline{n}|}$ について解くと，

$${}_{m}\pi'_{x:\overline{n}|} = \frac{{}_{n}E_{x} + \alpha + (\gamma-\delta)\ddot{a}_{x:\overline{m}|} + \delta\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{(1-\beta)\ddot{a}_{x:\overline{m}|} - {}_{m}(I\bar{A})_{x:\overline{n}|}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (6)$$

となり，(6)式を(4)式に代入して ${}_{m}\pi_{x:\overline{m}|}$ について整理すると

$${}_{m}\pi_{x:\overline{n}|} = \frac{{}_{n}E_{x}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}} + \frac{{}_{n}E_{x} + \alpha + (\gamma-\delta)\ddot{a}_{x:\overline{m}|} + \delta\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{(1-\beta)\ddot{a}_{x:\overline{m}|} - {}_{m}(I\bar{A})_{x:\overline{n}|}} \quad \frac{{}_{m}(I\bar{A})_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

となる。

7. 年４回期末生存者に支払う分割払年金の現価は Woolhouse の公式

$$a_{x}^{(m)} = \frac{1}{D_{x}}\left(\sum_{t=1}^{\infty} D_{x+t} + \frac{m-1}{2m} D_{x} + \frac{m^{2}-1}{12m^{2}}\ \frac{dD_{x}}{d_{x}} + \cdots\cdots\cdots\right)$$

において微係数を含む項を省略し，m＝４として整頓すれば

$$\fallingdotseq \frac{1}{D_{x}}\left(\frac{3}{8}D_{x} + N_{x+1}\right) = \frac{1}{D_{x}}\left(N_{x} - \frac{5}{8}D_{x}\right) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

つぎに，死亡者に対する給付現価を月別に細分し，総合すると

$${}^{(12)}a_{x} = \frac{1}{D_{x}} \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{12} \left(\frac{1}{12} \times \frac{j-3\gamma}{12}\right) \bar{C}_{x+t+\frac{j}{12}}$$

こゝにγは $j-3\gamma>0$ なる整数とする。したがって $0 \leqq \gamma < 4$

上式で $\bar{C}_{x+t+\frac{j}{12}} \fallingdotseq \bar{C}_{x+t}$ とすれば

$$\fallingdotseq \frac{1}{D_{x}} \cdot \sum_{t=1}^{\infty} \bar{C}_{x+t} \sum_{j=1}^{12} \left(\frac{1}{12} \times \frac{j-3\gamma}{12}\right) = \frac{1}{6}\,\frac{1}{D_{x}} \sum_{t=1}^{\infty} \bar{C}_{x+t} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{D_{x}} \cdot \bar{M}_{x} \cdots\cdots (2)$$

よって(1)と(2)を加えると

$$\overset{(12)}{a}{}_{x}^{(4)} = \frac{1}{D_x}\left(N_x - \frac{5}{8} D_x + \frac{1}{6} \overline{M}_x\right)$$

なお，前段生存者給付年金現価は

$$a_x^{(4)} = \frac{1}{D_x} \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{4}{}' D_{x+t+\frac{i}{4}} \times \frac{1}{4}$$

であり，この式において近似的に

$$D_{x+t+\frac{i}{4}} \fallingdotseq \frac{1}{4}\left((4-i) D_{x+t} + i D_{x+t+1}\right)$$

とおけば同一の結果をうる。

8. 先づP(Agg)は，Closed による保険料率を表わすものとする。今(x， t)なるものに対応する給付現価及び給料額を，夫々 $S_y(x, t)$ ($x \leqq y < r$)，B(x， t)とすれば，P(Agg)は次の算式により表わされる。

$$P(Agg) = \frac{\displaystyle\sum_{x,t}\left(B(x, t)\frac{\sum_{y=x}^{r} S_y(x, t)\, b_y \overline{C}_y}{b_x D_x}\right)}{\displaystyle\sum_{x,t} B(x, t) \cdot \frac{1}{b_x D_x} \cdot \sum_{y=x}^{r-1} b_y D_y}$$

一方，P(x， t)は次の様にもとめられる。

$$P(x, t) = \frac{\displaystyle\sum_{y=x}^{r} S_y(x, t)\, b_y \overline{C}_y}{\displaystyle\sum_{y=x}^{r-1} b_y D_y}$$

従って

$$P(Agg) = \frac{\displaystyle\sum_{x,t} B(x, t) \cdot P(x, t)\frac{\sum_{y=x}^{r-1} b_y D_y}{b_x D_x}}{\displaystyle\sum_{x,t} B(x, t)\frac{\sum_{y=x}^{r-1} b_y D_y}{b_x D_x}}$$

となるか，これはP(Agg)が，$B(x, t)\dfrac{\sum_{y=x}^{r-1} b_y D_y}{b_x D_x}$ によるP（x，t）の加重平均として表わせられる事を示している。

従って，

$$\underset{x,\ t}{\mathrm{Max}}\ P(x,t) \geqq P(Agg) \geqq \underset{x,\ t}{\mathrm{Min}}\ P(x,t)$$

次に P(Agg)が，Open による保険料率を表わす場合は次の通りである。

先づ新規加入の給料分布を $B_e(x)$で表わすものとすれば，

$$P(Agg) = \frac{\sum_{x,t}\left(B(x,t)\dfrac{\sum_{y=x}^{r} S_y(x,t)\, b_y \bar{C}_y}{b_x D_x}\right) + \dfrac{1}{\log_e(1+i)}\sum_{x}\left(B_e(x)\dfrac{\sum_{y=x}^{r} S_y(x,0)\, b_y \bar{C}_y}{b_x D_x}\right)}{\sum_{x,t} B(x,t)\dfrac{\sum_{y=x}^{r-1} b_y D_y}{b_x D_x} + \dfrac{1}{\log_e(1+i)}\sum_{x} B_e(x)\dfrac{\sum_{y=x}^{r-1} b_y D_y}{b_x D_x}}$$

$$= \frac{\sum_{x,t} B(x,t)P(x,t)\dfrac{\sum_{y=x}^{r-1} b_y D_y}{b_y D_y} + \dfrac{1}{\log_e(1+i)}\sum_{x} B_e(x)P(x,0)\dfrac{\sum_{y=x}^{r-1} b_y D_y}{b_x D_x}}{\sum_{x,t} B(x,t)\dfrac{\sum_{y=x}^{r-1} b_y D_y}{b_x D_x} + \dfrac{1}{\log_e(1+i)}\sum_{x} B_e(x)\dfrac{\sum_{y=x}^{r-1} b_y D_y}{b_x D_x}}$$

となり，これも矢張りP(Agg)がP（x，t）の加重平均として表わされることを示している。

9. 問題の本質を害なわない程度に簡略化して考えることにする。

まず，次のように記号を定義する。

加入年令　　x_0

定年年令および支給開始年令　　x_r

支給乗率　　$\alpha_t^{(w)}$，$\alpha_{x_r-x_0}^{(r)}$

現在給与　$\mathbb{B}_x$

平均給与　$\widetilde{\mathbb{B}}_x \equiv \dfrac{1}{x-x_0+1}\cdot\sum_{t=0}^{x-x_0}\mathbb{B}_{x_0+t}$,　$\widetilde{\mathbb{B}}_{x_r} \equiv \dfrac{1}{x_r-x_0}\sum_{t=0}^{x_r-x_0-1}\mathbb{B}_{x_0+t}$

給与指数　b_x

据置年金現価率　$a_x^{(w)} \equiv {}_{x_r-x-\frac{1}{2}|}\ddot{a}_{x+\frac{1}{2}}$,　$a_{x_r}^{(r)} \equiv a_{x_r}$

加入，拠出，給付は年初１回とする。

責任準備金　${}_tV_{x_0}$ の算式は次のとおりである。

$$
{}_tV_{x_0} = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{x_r-x_0-t-1} \overline{C}^{(w)}_{x_0+t+k}\cdot\widehat{\mathbb{B}}_{x_0+t+k}\cdot a^{(w)}_{x_0+t+k}\cdot\alpha^{(w)}_{t+k} + D_{x_r}\cdot\widetilde{\mathbb{B}}_{x_r}\cdot a^{(r)}_{x_r}\cdot\alpha^{(r)}_{x_r-x_0}}{D_{x_0+t}}
$$

$$
- \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{x_r-x_0-t-1} D_{x_0+t+k}\cdot\mathbb{B}_{x_0+t+k}\cdot P_{x_0}}{D_{x_0+t}}
$$

これに

$$
\widehat{\mathbb{B}}_{x_0+t+k} = \frac{1}{t+k+1}\left\{\sum_{\ell=0}^{t-1}\mathbb{B}_{x_0+\ell} + \sum_{\ell=t}^{t+k}\mathbb{B}_{x_0+\ell}\right\}
$$

$$
\widetilde{\mathbb{B}}_{x_r} = \frac{1}{x_r-x_0}\left\{\sum_{\ell=0}^{t-1}\mathbb{B}_{x_0+\ell} + \sum_{\ell=t}^{x_r-x_0-1}\mathbb{B}_{x_0+\ell}\right\}
$$

を代入して整頓すると，

$$
{}_tV_{x_0} = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{x_r-x_0-t-1}\overline{C}^{(w)}_{x_0+t+k}\cdot\frac{1}{t+k+1}\left\{\sum_{\ell=0}^{t-1}\mathbb{B}_{x_0+\ell} + \sum_{\ell=t}^{t+k}\mathbb{B}_{x_0+\ell}\right\} a^{(w)}_{x_0+t+k}\cdot\alpha^{(w)}_{t+k}}{D_{x_0+t}}
$$

$$
\frac{\displaystyle + D_{x_r}\frac{1}{x_r-x_0}\left\{\sum_{\ell=0}^{t-1}\mathbb{B}_{x_0+\ell} + \sum_{\ell=t}^{x_r-x_0-1}\mathbb{B}_{x_0+\ell}\right\} a^{(r)}_{x_r}\cdot\alpha^{(r)}_{x_r-x_0} - \sum_{k=0}^{x_r-x_0-t-1} D_{x_0+t+k}\mathbb{B}_{x_0+t+k}P_{x_0}}{D_{x_0+t}}
$$

$$= \Big[\sum_{k=0}^{x_r - x_0 - t - 1}{}' \ \overline{C}^{(w)}_{x_0+t+k} \ \frac{t}{t+k+1} \ \widetilde{B}_{x_0+t-1} \cdot a^{(w)}_{x_0+t+k} \cdot \alpha^{(w)}_{t+k}$$

$$+ \ D_{x_r} \ \frac{t}{\chi_r - \chi_0} \ \widetilde{B}_{x_0+t-1} \cdot a^{(r)}_{x_r} \cdot \alpha^{(r)}_{x_r - x_0} \ \Big] \Big/ D_{x_0+t}$$

$$+ \ \Big[\sum_{k=0}^{x_r - x_0 - t - 1}{}' \ \overline{C}^{(w)}_{x_0+t+k} \ \frac{1}{t+k+1} \sum_{\ell=t}^{t+k}{}' \ B_{x_0+\ell} \cdot a^{(w)}_{x_0+t+k} \cdot \alpha^{(w)}_{t+k}$$

$$+ \ D_{x_r} \ \frac{1}{\chi_r - \chi_0} \sum_{\ell=t}^{x_r - x_0 - 1}{}' \ B_{x_0+\ell} \cdot a^{(r)}_{x_r} \cdot \alpha^{(r)}_{x_r - x_0} \ - \sum_{k=0}^{x_r - x_0 - t - 1}{}' \ D_{x_0+t+k} \cdot B_{x_0+t+k} \ P_{x_0} \Big] \Big/ D_{x_0+t}$$

$$= \widetilde{B}_{x_0+t-1} \cdot {}_tV^{(\sim t)}_{x_0} + B_{x_0+t-1} \cdot {}_tV^{(t\sim)}_{x_0}$$

こゝに

$${}_tV^{(\sim t)}_{x_0} \equiv \Big[\sum_{k=0}^{x_r - x_0 - t - 1}{}' \ \overline{C}^{(w)}_{x_0+t+k} \cdot a^{(w)}_{x_0+t+k} \ \frac{1}{t+k+1} \ \alpha^{(w)}_{t+k}$$

$$+ \ D_{x_r} \cdot a^{(r)}_{x_r} \ \frac{1}{\chi_r - \chi_0} \ \alpha^{(r)}_{x_r - x_0} \Big] \cdot \frac{t}{D_{x_0+t}}$$

$${}_tV^{(t\sim)}_{x_0} \equiv \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{x_r - x_0 - t - 1}{}' \ \overline{C}^{(w)}_{x_0+t+k} \cdot \frac{1}{t+k+1} \sum_{\ell=t}^{t+k}{}' \ b_{x_0+\ell} \cdot a^{(w)}_{x_0+t+k} \cdot \alpha^{(w)}_{t+k}}{D_{x_0+t} \ b_{x_0+t-1}}$$

$$+ \ \frac{\displaystyle D_{x_r} \cdot \frac{1}{\chi_r - \chi_0} \sum_{\ell=t}^{x_r - x_0 - 1}{}' \ b_{x_0+\ell} \cdot a^{(r)}_{x_r} \cdot \alpha^{(r)}_{x_r - x_0} - \sum_{k=0}^{x_r - x_0 - t - 1}{}' \ D_{x_0+t+k} \, b_{x_0+t+k} \, P_{x_0}}{D_{x_0+t} \ b_{x_0+t-1}}$$

$$\equiv {}_tV_{x_0} - {}_tV^{(\sim t)}_{x_0} \cdot \frac{\widetilde{b}_{x_0+t-1}}{b_{x_0+t-1}}$$

$$
{}_{t}V_{x_0} \equiv \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{x_r - x_0 - t - 1} \overline{C}^{(w)}_{x_0+t+k} \cdot \widetilde{b}_{x_0+t+k} \cdot a^{(w)}_{x_0+t+k} \cdot \alpha^{(w)}_{t+k} + D_{x_r}\, \widetilde{b}_{x_r} \cdot a^{(r)}_{x_r} \cdot \alpha^{(r)}_{x_r - x_0}}{D_{x_0+t} \cdot b_{x_0+t-1}}
$$

$$
- \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{x_r - x_0 - t - 1} D_{x_0+t+k} \cdot b_{x_0+t+k} \cdot P_{x_0}}{D_{x_0+t}\ b_{x_0+t-1}}
$$