昭和 38 年度　（問題）

午前の部

1. 大きさNの有限母集団をr個の部分母集団に層化して抽出を行ない，母集団の平均値を次の推定量によって推定したい。

$$\overline{X}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{r} N_i \overline{X}_i$$

ここにN_i は第 i 層の部分母集団の大きさ，$\overline{X}_i$ は第 i 層から重複を許さずに大きさ n_i の標本をとったときの平均値統計量とする。

この抽出に要する総費用Cと第 i 層の分散 σ_i^2 および第 i 層の一抽出単位当りの費用 c_i が与えられている場合に，推定量の分散を最少にするには，各層の抽出数をどのように決めればよいか。

2. 正規母集団N（μ，σ^2 ）の大きさ 2 mの任意標本の中央値（median)はμの不偏推定量(unbiased estimator)であることを証明せよ。

午後の部

1. 分散σ^2 が既知の正規母集団において，平均μを検定したい。帰無仮説$\mu=\mu_0$，対立仮説$\mu=\mu_1$ としたとき，第1種の過誤の確率がαに，第2種の過誤の確率がβまたはそれ以下になるようにするには，サンプルの大きさnをいくらにすればよいか。

ただし，$\mu_0<\mu_1$，$\alpha<\frac{1}{2}$，$\beta<\frac{1}{2}$ としa，bが

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx=\alpha,\quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_b^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx=\beta$$

を満足しているものとする。

2. 下記の二問のうち，いずれか一問に答えよ。

(1) 客の到着は平均λのPoisson 分布に，応対時間は平均$\frac{1}{\mu}$の指数分布に従う待ち合わせ行列で，窓口1個の場合の平均待ち合わせ人数およびその分散を求めよ。（$\frac{\lambda}{\mu}<1$）

〔問〕

ただし，到着した客は立去らずにかならず行列に加わるものとし，定常状態を考えることにする。

(2) 退化しない線型制約式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_1 \geqq 0,\ \cdots\cdots\cdots,\ x_n \geqq 0 \quad (ここに m < n) \end{cases}$$

が解をもてば，基本解 (basic solution) をもつことを証明せよ。

ただし，基本解とは解 (x_1 , ……, x_n) において 0 でない要素 x_i が m 個をこえないことを意味する。

昭和 38 年度　（解答）

午 前 の 部

1. 標本抽出法の最適配分の問題である。

$$V(\bar{X})=\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{r} N_i^2 \frac{N-n_i}{N_i-1}\cdot\frac{\sigma_i^2}{n_i}$$ であるから，$C=\sum_{i=1}^{r} C_i\ n_i$ の条件をいれて

最少にすればよい。Lagrange の未定係数法を使う。

$$f(n_1, n_2, \cdots\cdots, n_n, \lambda)=V(\bar{X})+\lambda C$$
$$=\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{r} N_i^2 \frac{N_i-n_i}{N_i-1}\ \frac{\sigma_i^2}{n_i}$$
$$+\lambda\sum_{i=1}^{r} c_i\ n_i$$ として，n_i で微分する。

$$\frac{\partial f}{\partial n_i}=\frac{N_i^2}{N^2}\cdot\frac{1}{N_i-1}\left(-\frac{N_i}{n_i^2}\right)\sigma_i^2+\lambda c_i=0$$

これより，$n_i^2=\dfrac{1}{\lambda}\cdot\dfrac{1}{c_i}\cdot\dfrac{N_i^2}{N^2}\sigma_i^2\cdot\dfrac{N_i}{N_i-1}$ ，$N_i-1\fallingdotseq N_i$ とすれば，

$$n_i=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\cdot\frac{1}{\sqrt{c_i}}\cdot\frac{N_i}{N}\sigma_i$$ である。これを $C=\sum_{i=1}^{r} n_i\ c_i$ に代入すれば，

$$C=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\cdot\sum_{i=1}^{r}\frac{N_i\ \sigma_i}{\sqrt{c_i}\,N}\ C_i=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\cdot\sum_{i=1}^{r}\frac{N_i\,\sigma_i\sqrt{c_i}}{N}$$ より

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=\frac{NC}{\sum_{i=1}^{r} N_i\ \sigma_i\ \sqrt{c_i}}$$ である。

よって $$n_i=\frac{NC}{\sum_{i=1}^{r} N_i\,\sigma_i\sqrt{c_i}}\cdot\frac{N_i}{\sqrt{c_i}\,N}\sigma_i=\frac{CN_i\,\sigma_i}{\sqrt{c_i}\left(\sum_{i=1}^{r} N_i\,\sigma_i\sqrt{c_i}\right)}$$

2. median は sample を大きさの順にならべた中央の二つの平均であるから，

$$X_{(1)} \leqq X_{(2)} \leqq \cdots\cdots \leqq X_{(m)} \leqq X_{(m+1)} \leqq \cdots\cdots \leqq X_{(2m)}$$

より，

$X = \frac{1}{2}\left(X_{(m)} + X_{(m+1)} \right)$ で与えられる。

$X_{(m)} - \mu = X'_{(m)}$ の density function を $f_{(m)}(x)$
$X_{(m+1)} - \mu = X'_{(m+1)}$ の density function を $f_{(m+1)}(x)$ } とすれば，

$$f_{(m)}(x) = \frac{(2m)!}{(m-1)!\,m!}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}du\right)^{m-1}$$

$$\times\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{x}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}du\right)^{m}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

$$f_{(m+1)}(x) = \frac{(2m)!}{m!\,(m-1)!}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}du\right)^{m}$$

$$\times\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{x}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}du\right)^{m-1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

である。

これより，$E(X) = E\left(\frac{X'_{(m)} + X'_{(m+1)}}{2}\right) + \mu$ であるから，

$E\left(\frac{X'_{(m)} + X'_{(m+1)}}{2}\right) = 0$ を証明すればよい。

$$E\left(\frac{X'_{(m)} + X'_{(m+1)}}{2}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{(2m)!}{(m-1)!\,m!}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x f_{(m)}(x)\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} x f_{(m+1)}(x)\,dx\right]$$

である。

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\left(f_{(m)}(x) + f_{(m+1)}(x)\right)dx = \int_{-\infty}^{0} x\left(f_{(m)}(x) + f_{(m+1)}(x)\right)dx$$
$$+\int_{0}^{\infty} x\left(f_{(m)}(x) + f_{(m+1)}(x)\right)dx$$

$$=-\int_0^{\infty} x\left(f_{(m)}(x)+f_{(m+1)}(x)\right)dx+\int_0^{\infty} x\left(f_{(m)}(x)+f_{(m+1)}(x)\right)dx=0$$

よって　$E\left(\dfrac{X'_{(m)}+X'_{(m+1)}}{2}\right)=0$　が証明できた。

午 後 の 部

1. $\overline{X}$を大きさnの sample 平均とすれば，$N\left(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n^2}\right)$にしたがう。

題意より

$$P_r\{(\overline{X}-\mu_0)>\varepsilon \mid \mu=\mu_0\}=\alpha$$

$$P_r\{(\overline{X}-\mu_0)>\varepsilon \mid \mu=\mu_1\}\geqq 1-\beta$$ である。

$\dfrac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{\sigma}$ は，N (0 ， 1) にしたがうことから，

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\alpha=P_r\left\{\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu_0)}{\sigma}\geqq\frac{\sqrt{n}\,\varepsilon}{\sigma}\mid \mu=\mu_0\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\sqrt{n}\,\varepsilon}{\sigma}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

より，　$\dfrac{\sqrt{n}}{\sigma}\varepsilon=a$　　　$\varepsilon=\dfrac{\sigma a}{\sqrt{n}}$ ……………①　である。

一方

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-b}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx=1-\beta\leqq P_r\left\{\frac{\sqrt{n}(X-\mu_1)}{\sigma}>\frac{\sqrt{n}(\varepsilon+\mu_0-\mu_1)}{\sigma}\mid \mu=\mu_1\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\sqrt{n}(\varepsilon+\mu_0-\mu_1)}{\sigma}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

より，

$$-b\geqq\frac{\sqrt{n}(\varepsilon+\mu_0-\mu_1)}{\sigma}$$ ……………………②　を得る。

①を②に代入して，n をとけば，

$n \geqq \sigma^2 \left(\dfrac{a+b}{\mu_1-\mu_0}\right)^2$ である。

2. (1) 定常状態での待ち合わせ人数がnである確率をp_nとすれば，

$$\lambda p_0 - \mu p_1 = 0$$

$$\lambda p_{n-1} - (\lambda+\mu) p_n + \mu p_{n+1} = 0$$ の関係があるから，

p_nを求めれば，

$p_1 = \dfrac{\lambda}{\mu} p_0$ ，$p_n = \dfrac{\lambda}{\mu} p_{n-1}$ であるから，$p_n = \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0$

$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$であるから，$p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = 1$ $(\rho < 1)$より，$p_0 = 1-\rho$，よつて

$p_n = (1-\rho)\rho^n$ $(n = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$である。

平均待ち合せ人数は，

$$\sum_{n=0}^{\infty} n p_n = (1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n$$

$$= (1-\rho)\rho\sum_{n=0}^{\infty} n\rho^{n-1} = \frac{(1-\rho)\rho}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1-\frac{\lambda}{\mu}} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$

である。

分散は，

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 p_n = \frac{2\rho^2}{(1-\rho)^2} + \frac{\rho}{1-\rho}$$

より，$\dfrac{2\rho^2}{(1-\rho)^2} + \dfrac{\rho}{1-\rho} - \dfrac{\rho^2}{(1-\rho)^2} = \dfrac{\rho^2}{(1-\rho)^2} + \dfrac{\rho}{1-\rho}$

$$= \frac{\lambda\mu}{(\mu-\lambda)^2}$$ である。

(2) $x' = (x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$を基本解でない解とする。一般性を失うことなく $x_1 > 0$，$x_2 > 0$，$\cdots\cdots$，$x_r > 0$，$x_{r+1} = \cdots\cdots = x_n = 0$ $(r > m)$としてよい。

題意により，

係数のベクトル

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \cdots\cdots, \begin{pmatrix} a_{1r} \\ \vdots \\ a_{mr} \end{pmatrix}$$ の中で，m 個の１次独立なベクトルが在在

する。 再び一般性を失うことなしに，その１次独立なベクトルを $\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \cdot\cdot, \begin{pmatrix} a_{1m} \\ \vdots \\ a_{mm} \end{pmatrix}$ とする。

matrix Aを $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots\cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$ とすれば，$y' = (y_1, \cdots\cdots, y_m, -1, 0, \cdots\cdots, 0)$ なるベクトルを選んで，$Ay = 0$ とできる。したがって任意の θ について，

$$b = Ax = A(x + \theta y) = A \begin{pmatrix} x_1 + \theta y_1 \\ \vdots \\ x_m + \theta y_m \\ x_{m+1} - \theta \\ x_{m+2} \\ \vdots \\ x_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$ とできる。

θ は任意であるから，$\theta > 0$ で，$x_1 + \theta y_1, \cdots\cdot, x_m + \theta y_m, x_{m-1} - \theta$，の少なくとも一つを，他を正にしたまま０にできる。

この $x + \theta y$ は，たかだか（$r - 1$）個の正値をエレメントとするベクトルである。

これを必要だけくりかえせば，０でない要素の数が m 個以下にできる。