〔問〕

昭和38年度　（問題）

午前の部

1. $$\frac{1}{D_x\ \ddot{S}_{\overline{n}|}}\left(C_x\ \ddot{S}_{\overline{1}|}+C_{x+1}\ \ddot{S}_{\overline{2}|}+\cdots\cdots+C_{x+n-1}\ \ddot{S}_{\overline{n}|}\right)=\frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{S}_{\overline{n}|}}-\frac{D_{x+n}}{D_x}$$

を証明せよ。

ただし，　$\ddot{S}_{\overline{n}|}=\sum_{y=1}^{n}(1+i)^y$

この恒等式を用いて，養老保険の保険料を次の形に分解せよ。

$$P_{x:\overline{n}|}=P'^{\,1}_{x:\overline{n}|}+\frac{1}{\ddot{S}_{\overline{n}|}}$$

この場合，$P'^{\,1}_{x:\overline{n}|}$ はどんな意味をもつか説明せよ。

2. 年m回払，x歳契約，完全生命年金に，つぎの条件をつけた場合の一時払純保険料を求めよ。

〔条件〕　給付した年金額が純保険料に達しないで死亡する場合には，その差額を死亡直後に支払う。

3. (イ)　予定死亡率　$\{q_x\}$

(ロ)　予定利率　i

(ハ)　予定事業費率（第t保険年度）$\alpha(1-{}_tV)+\beta({}_{t-1}V+\pi)$

の3個の条件から定められる養老保険の営業保険料πは

(イ)′　予定死亡率　$\{q_x+\alpha(1+i)\}$

(ロ)′　予定利率　$i-\beta(1+i)$

の条件から決定される純保険料Pと合致することを証明せよ。

ただし，保険金は期末払とする。

午 後 の 部

1. 健康者が廃疾となって生存している間支払われる年金の現価をa^{ai}とすると

$$a^{ai}_{x:\overline{n-1}|} = \frac{N^{ii}_{x} - N^{ii}_{x+n} - D^{ii}_{x}\ \ddot{a}^{i}_{x:\overline{n}|}}{D^{aa}_{x}}$$

となることを証明せよ。

2. 次の年金契約の一時払保険料およびt年経過の責任準備金を求めよ。

ただし，付加保険料は据置期間中は毎年一時払保険料のε%，年金開始後は年金額のδ%とする。

(1) m年経過後被保険者が生存しておれば年金支払を開始し，S年間は被保険者の生死にかかわらず，その後は被保険者の生存中，年金1を毎年始に支払う。

(2) 年金開始後に被保険者が死亡した場合，その次の年金開始日の応当日(保証期間中に死亡したときは保証期間終了直後の応当日)に，配偶者が生存しておれば，その日以後T年間配偶者にその生存期間中，配偶者年金λを支払う。

昭和38年度　(解答)

午前の部

1. $$\frac{1}{D_x\ \ddot{s}_{\overline{n}|}}\sum_{t=0}^{n-1} C_{x+t}\ \ddot{s}_{\overline{t+1}|}=*$$

$C_{x+t}=v\,D_{x+t}-D_{x+t+1}$　であるから,

$$*=\frac{1}{D_x\ \ddot{s}_{\overline{n}|}}\sum_{t=0}^{n-1}\left(v\,D_{x+t}-D_{x+t+1}\right)\ddot{s}_{\overline{t+1}|}=\frac{1}{D_x\ \ddot{s}_{\overline{n}|}}\left(\sum_{t=0}^{n-1}(1+\ddot{s}_{\overline{t}|})D_{x+t}\right.$$

$$\left.-\sum_{t=0}^{n-1}\ddot{s}_{\overline{t+1}|}\ D_{x+t+1}\right)(\ddot{s}_{\overline{0}|}=0\text{ とする})$$

$$=\frac{1}{D_x\ \ddot{s}_{\overline{n}|}}\left(N_x-N_{x+n}-\ddot{s}_{\overline{n}|}\ D_{x+n}\right)=\frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{s}_{\overline{n}|}}-\frac{D_{x+n}}{D_x}$$

次にn年満期養老保険の年払純保険料中から，満期保険金1を得るための定期積金としてこれを積立てるものとすると，その金額は$\frac{1}{\ddot{s}_{\overline{n}|}}$であり，第t年度末のこの積立金の元利合計は$\frac{\ddot{s}_{\overline{t}|}}{\ddot{s}_{\overline{n}|}}$となる。従って，第t年度の死亡に際し，これを保険金の一部に充当するとすれば，第t年度の死亡保険金はこれを控除した$1-\frac{\ddot{s}_{\overline{t}|}}{\ddot{s}_{\overline{n}|}}$である。

一方,

$$P_{x:\overline{n}|}\ \ddot{a}_{x:\overline{n}|}=\frac{1}{D_x}\sum_{\nu=0}^{n-1}C_{x+\nu}+\frac{D_{x+n}}{D_x}=\frac{1}{D_x}\sum_{\nu=0}^{n-1}\left(1-\frac{\ddot{s}_{\overline{\nu+1}|}}{\ddot{s}_{\overline{n}|}}\right)C_{x+\nu}$$

$$+\frac{1}{D_x}\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{\ddot{s}_{\overline{\nu+1}|}}{\ddot{s}_{n}}\ C_{x+\nu}+\frac{D_{x+n}}{D_x}$$

$$\therefore\ P_{x:\overline{n}|}=\frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\ \frac{1}{D_x}\sum_{\nu=0}^{n-1}\left(1-\frac{\ddot{s}_{\overline{\nu+1}|}}{\ddot{s}_{\overline{n}|}}\right)C_{x+\nu}+\frac{1}{\ddot{s}_{\overline{n}|}}$$

$$=P'^{1}_{x:\overline{n}|}+\frac{1}{\ddot{s}_{\overline{n}|}}$$

よってこの死亡保険に対する平準純保険料が，$P'^{1}_{x:\overline{n}|}$になっている。

2. 求める一時払純保険料を，年m回支払x才契約の完全生命年金部分と逓減定期保険部分に分離して考える。

(イ) 年m回支払われるx才契約完全生命年金の現価

$$\mathring{a}_x^{(m)} = a_x + \frac{m-1}{2m} + \frac{1}{2m}\bar{A}_x$$

(ロ) 逓減定期保険の現価

その保険金額は，求める一時払純保険料Pから始まり，毎瞬間ごとに減少してP年の期間の終りに0になる。

この部分の現価は

$$\int_0^P (P-t)\, v^t\, {}_tp_x\, \mu_{x+t}\, dt$$

$$= P\bar{A}^1_{x:\overline{P|}} - (\bar{I}\bar{A})^1_{x:\overline{P|}}$$

$$= P\bar{A}^1_{x:\overline{P|}}\,(1+i)^{\frac{1}{2}} - \left\{ (\bar{I}\bar{A})^1_{x:\overline{P|}} - \frac{1}{2}A^1_{x:\overline{P|}} \right\}(1+i)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{D_x}\left\{ \left(P+\frac{1}{2}\right)(\bar{M}_x - \bar{M}_{x+P}) - (\bar{R}_x - \bar{R}_{x+P} - P\bar{M}_{x+P}) \right\}$$

$$= \frac{1}{D_x}\left\{ \frac{1}{2}(\bar{M}_x - \bar{M}_{x+P}) + P\bar{M}_x - \bar{R}_x + \bar{R}_{x+P} \right\}$$

(イ)および(ロ)を加えれば，

$$P = \frac{1}{D_x}\left\{ N_{x+1} + \frac{m-1}{2m}D_x + \frac{1}{2m}\bar{M}_x + \frac{1}{2}(\bar{M}_x - \bar{M}_{x+P}) + P\bar{M}_x - \bar{R}_x + \bar{R}_{x+P} \right\}$$

故に，

$$P = \frac{N_{x+1} + \frac{m-1}{2m}D_x + \frac{1}{2m}\bar{M}_x + \frac{1}{2}(\bar{M}_x - \bar{M}_{x+P}) - \bar{R}_x + \bar{R}_{x+P}}{D_x - \bar{M}_x}$$

ここで，

$$\alpha = \frac{N_{x+1} + \frac{m-1}{2m}D_x + \frac{1}{2m}\bar{M}_x + \frac{1}{2}\bar{M}_x - \bar{R}_x}{D_x - \bar{M}_x}$$

$$\beta = \frac{1}{D_x - \overline{M}_x}$$

とおけば，α，β はPに関係のない定数である。

従って，

$$P = \alpha + \beta\left(\overline{R}_{x+P} - \frac{1}{2}\overline{M}_{x+P}\right)$$

この式を解いてPを求めればよい。

3. 予定死亡率 $\{ q_x \}$，予定利率 i，予定事業費率第t保険年度

$$\alpha(1 - {}_tV) + \beta({}_{t-1}V + \pi)$$

によって計算した養老保険の営業保険料を π，純保険料式保険料積立金を ${}_tV$ とすれば，次の式が成立する。

$$({}_tV+\pi)(1+i) - \{\alpha(1-{}_{t+1}V)+\beta({}_tV+\pi)\}(1+i) - q_{x+t} = p_{x+t}\cdot{}_{t+1}V$$

すなわち，

$$({}_tV+\pi)\{1+i-\beta(1+i)\} - \{q_{x+t}+\alpha(1+i)\} = {}_{t+1}V\{p_{x+t}-\alpha(1+i)\} \cdots (A)$$

ただし

$t=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1,\ {}_0V=0,\ {}_nV=1$

次に予定死亡率 $\{ q_x + \alpha(1+i) \}$，予定利率 $i - \beta(1+i)$ によって計算した養老保険の純保険料をP，純保険料式保険料積立金を ${}_tV^*$ とすれば，P，${}_tV^*$ について次の式が成立する。

$$({}_tV^*+P)\{1+i-\beta(1+i)\} - \{q_{x+t}+\alpha(1+i)\} = {}_{t+1}V^*\{p_{x+t}-\alpha(1+i)\}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots (B)$$

ただし

$t=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1 \quad {}_0V^*=0,\ {}_nV^*=1$

(A) は π，${}_1V$，${}_2V$，……，${}_{n-1}V$ の n 個を変数とする n 個の一次方程式であり，

(B) はP，${}_1V^*$，${}_2V^*$，…… ${}_{n-1}V^*$ の n 個を変数とする n 個の一次方程式である。

なお，π とP，${}_tV$ と ${}_tV^*$ の係数は一致する。

従つて，n 元一次連立方程式(A)が一意的に解が求まるならば，(B)も一意的に解が求まり，

$P=\pi$，${}_tV={}_tV^*$となり，問題は証明されたことになる。

すなわち，係数により作られた行列式DがD≠0であることを証明すればよい。

$$D=\begin{vmatrix} 1+i-\beta(1+i) & -\{p_x-\alpha(1+i)\} & 0 & 0 & 0\cdots \\ 1+i-\beta(1+i) & 1+i-\beta(1+i) & -\{p_{x+1}-\alpha(1+i)\} & 0 & 0\cdots \\ 1+i-\beta(1+i) & 0 & 1+i-\beta(1+i) & -\{p_{x+2}-\alpha(1+i)\} & 0\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & & & & \end{vmatrix}$$

$$=(1+i^*)\begin{vmatrix} 1+i^* & -p_{x+1}^* & 0\cdots\cdots\cdots & 0 \\ 0 & 1+i^* & -p_{x+2}^*\cdots\cdots\cdots & 0 \\ \cdots\cdots\cdots & & & \\ 0 & 0 & 0\cdots\cdots\cdots & 1+i^* \end{vmatrix}$$

$$+p_x^*\begin{vmatrix} 1+i^* & -p_{x+1}^* & 0\cdots\cdots\cdots & 0 \\ 1+i^* & 1+i^* & -p_{x+2}^*\cdots\cdots\cdots & 0 \\ \cdots\cdots\cdots & & & \\ 1+i^* & 0 & 0 & 1+i^* \end{vmatrix}$$

$$=(1+i^*)^n+p_x^*(1+i^*)^{n-1}+p_x^*p_{x+1}^*(1+i^*)^{n-2}+\cdots\cdots$$

$$=(1+i^*)^n\ddot{a}_{x:n}^* \neq 0$$

ただし

$$i^*=i-\beta(1+i),\quad p_{x+t}^*=p_{x+t}-\alpha(1+i)$$

とし，$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^*$は i^*, p_{x+t}^* によって計算した生命年金現価とする。

また $i-\beta(1+i)\neq -1$ であるものとする。

午 後 の 部

1. x才の$l_x(=l_x^{aa}+l_x^{ii})$人中n年後の生存者は l_{x+n} 人であり，廃疾者 l_x^{ii} 人中n年後の生存者は ${}_np_x^i\ l_x^{ii}$ 人であるから，x才の健康者 l_x^{aa} 人中n年後に生存する数は $l_{x+n}-{}_np_x^i\ l_x^{ii}$ である。

従って　${}_{n}p_{x}^{a}$ を健康者が n 年後に生存する確率とすると

$$ {}_{n}p_{x}^{a}=\frac{\ell_{x+n}-{}_{n}p_{x}^{i}\,\ell_{x}^{ii}}{\ell_{x}^{aa}} $$

しかるに　$\ell_{x+n}=\ell_{x}\,{}_{n}p_{x}$　であるから

$$ {}_{n}p_{x}^{a}=\frac{\ell_{x}}{\ell_{x}^{aa}}\,{}_{n}p_{x}-\frac{\ell_{x}^{ii}}{\ell_{x}^{aa}}\,{}_{n}p_{x}^{i} $$

$$ \ddot{a}_{x:\overline{n|}}^{a}=\sum_{t=0}^{n-1}v^{t}\,{}_{t}p_{x}^{a} $$

$$ =\frac{\ell_{x}}{\ell_{x}^{aa}}\sum_{t=0}^{n-1}v^{t}\,{}_{t}p_{x}-\frac{\ell_{x}^{ii}}{\ell_{x}^{aa}}\sum_{t=0}^{n-1}v^{t}\,{}_{t}p_{x}^{i} $$

$$ =\frac{\ell_{x}}{\ell_{x}^{aa}}\ddot{a}_{x:\overline{n|}}-\frac{\ell_{x}^{ii}}{\ell_{x}^{aa}}\ddot{a}_{x:\overline{n|}}^{i} $$

$a_{x:\overline{n-1|}}^{ai}=\ddot{a}_{x:\overline{n|}}^{a}-\ddot{a}_{x:\overline{n|}}^{aa}$ であるから

$$ a_{x:\overline{n-1|}}^{ai}=\frac{\ell_{x}}{\ell_{x}^{aa}}\ddot{a}_{x:\overline{n|}}-\frac{\ell_{x}^{ii}}{\ell_{x}^{aa}}\ddot{a}_{x:\overline{n|}}^{i}-\ddot{a}_{x:\overline{n|}}^{aa} $$

$$ =\frac{D_{x}}{D_{x}^{aa}}\ddot{a}_{x:\overline{n|}}-\frac{D_{x}^{ii}}{D_{x}^{aa}}\ddot{a}_{x:\overline{n|}}^{i}-\frac{N_{x}^{aa}-N_{x+n}^{aa}}{D_{x}^{aa}} $$

$$ =\frac{N_{x}-N_{x+n}}{D_{x}^{aa}}-\frac{D_{x}^{ii}\,\ddot{a}_{x:\overline{n|}}^{i}}{D_{x}^{aa}}-\frac{N_{x}^{aa}-N_{x+n}^{aa}}{D_{x}^{aa}} $$

$$ \fallingdotseq\frac{N_{x}^{ii}-N_{x+n}^{ii}-D_{x}^{ii}\,\ddot{a}_{x:\overline{n|}}^{i}}{D_{x}^{aa}} $$

2. 被保険者及び配偶者の契約年令をそれぞれx，yとする。

(1) 保険料

(a) 被保険者の年金部分

$$\pi = \frac{\left(1+\frac{\delta}{100}\right)\left(\ddot{a}_{\overline{S}|} + {}_{S/}\ddot{a}_{x+m}\right){}_{m}E_{x}}{1-\frac{\varepsilon}{100}\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}$$

(b) 配偶者の年金部分

$$\pi' = \frac{\lambda \sum_{i=m}^{\infty} {}_{i/}A^{1}_{x:\overline{1}|} \cdot {}_{i+1}p_{y} \cdot {}_{i'-i}E_{y+i+1}\left(1+\frac{\delta}{100}\right)\ddot{a}_{y+i'+1:\overline{T}|}}{1-\frac{\varepsilon}{100}\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}$$

ここに　$i' = \max(m+S-1,\ i)$

(2) 責任準備金

(a) 被保険者の年金部分

1） 年金開始前

$$\left(1+\frac{\delta}{100}\right)\left(\ddot{a}_{\overline{S}|} + {}_{S/}\ddot{a}_{x+m}\right){}_{m-t}E_{x+t} + \frac{\varepsilon\pi}{100}\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}$$

2） 年金開始後　被保険者生存中

$$\left(1+\frac{\delta}{100}\right)\left(\ddot{a}_{\overline{S'}|} + {}_{S'/}\ddot{a}_{x+t}\right)$$

3） 年金開始後　被保険者死亡後

$$\left(1+\frac{\delta}{100}\right)\ddot{a}_{\overline{S'}|}$$

ここに　$S' = \max\{S-(t-m),\ 0\}$

(b) 配偶者の年金部分

1） 配偶者生存中

(イ) 被保険者生存中

$$\lambda \sum_{i=m'}^{\infty} {}_{i-t/}A_{x+t:\overline{1}|} \cdot {}_{i-t+1}P_{y+t} \cdot {}_{i'-i}E_{y+i+1} \cdot \left(1+\frac{\delta}{100}\right) \times$$

$$\ddot{a}_{y+i+1:\overline{T}|} + \frac{\varepsilon}{100} \pi' \ddot{a}_{x+t:y+t:\overline{m'-t}|}$$

ここに $m' = \max(m, t)$ $i' = \max(m+S-1, i)$

(ロ) 被保険者死亡後

年金開始前

$$\lambda \left(1+\frac{\delta}{100}\right) \ddot{a}_{y+m+s:\overline{T}|} \cdot {}_{m+s-t}E_{y+t}$$

年金開始後

$$\lambda \left(1+\frac{\delta}{100}\right) a_{y+t:\overline{T-T'}|}$$

ここにT′ は配偶者年金を支払開始してからの経過年数

2） 配偶者死亡後 0